

# Les bons comptes font les bons amis

Gaëtan Bayle des Courchamps

10 juillet 2005  
(révision 15 Août 2005)

## 1 Introduction

5 amis partent en vacances. Naturellement, ils mangent, boivent, font du camping, prennent les transports, et parfois l'un paye pour l'autre, ou prête de l'argent contre la promesse d'un remboursement ultérieur, etc.

Comment, à l'issue des vacances, les 5 amis pourront-ils régler leurs comptes ?

L'erreur, ici, serait de s'égarer dans des raisonnements du genre "  $x$  doit tant à  $y$ , mais comme  $y$  lui avait prêté auparavant telle autre somme venant de  $z$ , etc." En général, ça fait des calculs archi-complicqués auxquels personne ne comprend plus rien, d'où risques de contestation et de désaccords persistants.

## 2 Méthode

### 2.1 Tenue des comptes

On prévoit deux rubriques : avant équilibrage (à droite) et après équilibrage (à gauche). Chaque participant au séjour a une colonne dans chaque rubrique, et chaque ligne correspond à une dépense (ou à un transfert d'argent).

ap r ès					av a nt					
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	Commentaires
50	40	30	20	10	50	40	30	20	10	Chacun a payé sa part
								10	-10	<i>D</i> a prêté 10 euros à <i>E</i>
10	11	12	13		22	24				<i>A</i> paye pour <i>A</i> et <i>C</i> ,
	14	15	16	17						et <i>B</i> paye pour <i>B</i> et <i>D</i> .
36					62					<i>A</i> a payé pour tout le monde.
						12	10		14	<i>B,C,E</i> ont payé pour <i>A</i>

**Remarque :** Sur chaque ligne, la somme des cases de la rubrique avant équilibrage doit être égale à celle des cases de la rubrique après équilibrage.

### 2.2 Calcul du trop payé

On regarde ce que chacun a payé pour l'instant (rubrique avant équilibrage), on fait la différence avec ce que chacun aurait dû payer (rubrique après équilibrage). On obtient le trop-payé (s'il est négatif, c'est que la personne concernée doit encore de l'argent à quelqu'un).

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	Commentaires
134	76	40	30	14	rubrique avant équilibrage
96	65	57	49	27	rubrique après équilibrage
38	11	-17	-19	-13	trop-payé

**Remarque :** Comme, le total des sommes en jeu, pour chaque ligne de la rubrique avant équilibrage, vaut le total des sommes en jeu dans la rubrique après équilibrage, la somme des cases de la ligne du trop payé doit être nulle.

### 2.3 Calcul des compensations

On met les personnes qui ont trop payé sur une ligne, celles qui n'ont pas assez payé sur une autre ligne, et on répartit les sommes en fonction des cumuls.

A : 38			B : 11	Trop payé
C : 17	D : 19	E : 13		Pas assez payé
C : 17	D : 19	E : 2	E : 11	Répartition

**Remarque :** Si  $a$  personnes ont trop payé, et  $b$  pas assez, sur un total de  $a + b = n$  personnes, cette méthode permet toujours d'avoir un équilibrage en au plus  $n - 1$  chèques.

En effet, les  $a$  personnes correspondent à  $a - 1$  délimiteurs | dans la ligne du trop payé. Les  $b$  autres correspondent à  $b - 1$  délimiteurs dans la ligne du pas assez payé. Au total, la ligne Pas Assez Payé compte au plus  $a - 1 + b - 1 = (a + b) - 2 = n - 2$  délimiteurs, ce qui divise cette ligne en  $(n - 2) + 1 = n - 1$  sections.

D'autre part, le montant total des chèques à échanger est égal à la somme des trop payés positifs. C'est le minimum imaginable, car en-deça ceux qui ont trop payé ne rentreraient pas dans leurs frais.