Problèmes agaçants

Gaëtan Bayle des Courchamps

Décembre 2011
(révision 14 Novembre 2015)

Ce document est destiné à rassembler les problèmes "agaçants", i.e. ceux dont la résolution m'a pris un temps disproportionné à leur difficulté.
En même temps qu'une leçon d'humilité pour un matheux en principe bon, c'est une illustration des impasses auxquelles peut mener une démarche intellectuelle incorrecte.

Table des matières

1 Problèmes de géométrie

1.1 Section de carré

Exercice 1.1 (Concours Kangourou) *On prend un carré $ABCD$ de côté* 1 *(figure 1 page 2). Soit I le milieu de $[AB]$ et J delui de $[BC]$. $[AJ]$ coupe $[DI]$ en K et $[DB]$ en L. Quelle est l'aire de $IKLB$?*

Solution : Avec un petit coup de Thalès c'est très simple. $Aire(ILKB) = Aire(ABJ) - Aire(AIK) - Aire(BLJ) = \frac{1}{4} - Aire(AIK) - Aire(BLJ)$.
Les triangles AIK et AID ont en commun leur hauteur issue de A, donc $Aire(AIK) = \frac{IK}{ID} Aire(AID) = \frac{IK}{ID} \times \frac{1}{4}$. Soit E l'intersection de (AJ) avec (DC). D'après Thalès $\frac{IK}{ID} = \frac{AI}{AI+DE} = \frac{1}{5}$. Donc $Aire(AIK) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.
De même $Aire(BLJ) = \frac{JL}{JA} Aire(ABJ) = \frac{BJ}{BJ+AD} Aire(ABJ) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
Finalement $Aire(IKLB) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} - \frac{1}{12} = \frac{7}{60}$. ∎
Remarque : Celui-là c'est le pompon: 17 ans avant cette solution simple. Nul besoin de revenir aux longueurs et aux angles à grands coups d'algèbre et de Pythagore, puisque ici seules les aires nous intéressent.
Autre erreur: avoir tardé à utiliser des points auxiliaires qui rendent les calculs d'aire simples en faisant apparaître les bonnes parallèles.

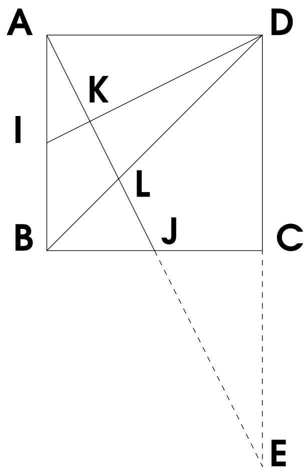

Figure 1: Concours Kangourou

1.2 Carrés, triangles et cocyclicité

Exercice 1.2 (Concours Général 1996) *Soit un triangle ABC. On construit les carrés extérieurs au triangle: $ABDE$, $ACFG$, $BCHI$. Montrer que les points D, E, F, G, H, I sont cocycliques si et seulement si ABC est équilatéral ou bien rectangle isocèle.*

Remarque : Ouille! Que d'inconnues a priori (ça m'a intimidé pendant des années)! Pourtant le problème part de trois données simples (les dimensions de ABC), dont les rôles sont symétriques. On peut donc espérer des simplifications intéressantes.
En particulier, on peut débroussailler ce problème en ne s'attaquant d'abord qu'à deux carrés.
Solution : Les médiatrices des segments $[DE]$, $[FG]$, $[HI]$ sont respectivement confondues avec celles de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$. Donc si $DEFGHI$ sont cocycliques, le centre du cercle concerné est celui du cercle circonscrit à ABC, O intersection des trois médiatrices.
• Commençons par prouver qu'il faut que ABC soit isocèle. Supposons qu'il ne le soit pas.
Soit r le rayon du cercle circonscrit à ABC. Posons $a = BC/2$, $b = AC/2$, $c = AB/2$. En supposant que O est à l'intérieur de ABC, on a $OH^2 = a^2 + (2a + \sqrt{r^2 - a^2})^2$ et $OF^2 = b^2 + (2b + \sqrt{r^2 - b^2})^2$. Posons $\alpha = \frac{a}{b} = \frac{BC}{AC}$ et $x = \frac{r}{b}$. Alors:

$$\begin{array}{rcl} OF = OH & \Longrightarrow & a^2 + (2a + \sqrt{r^2 - a^2})^2 = b^2 + (2b + \sqrt{r^2 - b^2})^2 \\ & \Longrightarrow & \alpha^2 + (2\alpha + \sqrt{x^2 - \alpha^2})^2 = 1 + (2 + \sqrt{x^2 - 1})^2 \\ & \Longrightarrow & \alpha^2 + \alpha\sqrt{x^2 - \alpha^2} = 1 + \sqrt{x^2 - 1} \\ & \Longrightarrow & \sqrt{x^2 - 1} = (\alpha^2 - 1) + \alpha\sqrt{x^2 - \alpha^2} \\ & \Longrightarrow & x^2 - 1 = (\alpha^2 - 1)^2 + 2\alpha(\alpha^2 - 1)\sqrt{x^2 - \alpha^2} + \alpha^2(x^2 - \alpha^2) \\ & \Longrightarrow & 2(\alpha^2 - 1) - x^2(\alpha^2 - 1)^2 = 2\alpha(\alpha^2 - 1)\sqrt{x^2 - \alpha^2} \\ & \Longrightarrow & 2 - x^2 = 2\alpha\sqrt{x^2 - \alpha^2} \quad \text{ou} \quad \alpha = 1 \\ & \Longrightarrow & (2 - x^2)^2 = 4\alpha^2(x^2 - \alpha^2) \quad \text{ou} \quad \alpha = 1 \\ & \Longrightarrow & x^4 - 4(\alpha^2 + 1)x^2 + 4(1 + \alpha^4) = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 1 \end{array}$$

Comme ABC n'est pas isocèle, $\alpha \neq 1$ et on a une équation du second degré, d'inconnue x^2, de déterminant $\Delta = (4(\alpha^2 + 1))^2 - 4 * 4(1 + \alpha)^4 = 32\alpha^2$. Les valeurs possibles de x^2 sont donc $x^2 = 2(1 + \alpha^2 \pm \alpha\sqrt{2})$.
Posons de même $\beta = \frac{c}{b}$. On montre de même $x^2 = 2(1 + \beta^2 \pm \beta\sqrt{2})$.
Alors $\alpha^2 \pm \alpha\sqrt{2} = \beta^2 \pm \beta\sqrt{2}$, qu'il est plus simple de factoriser en $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \pm\sqrt{2}(\alpha \pm \beta)$.
On remarque $\alpha - \beta \neq 0$ (ABC non-isocèle), et $\alpha + \beta \geq 0$ (quotients de longueurs). Les 4 cas possibles se réduisent alors à $\alpha + \beta = \sqrt{2}$ ou $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Or $BC + AC \geq AB$ donc (en supposant que AB est le plus grand des côtés) $|\alpha - \beta| \leq 1$, donc seul reste $\alpha + \beta = \sqrt{2}$ i.e. $a + b = c\sqrt{2}$
On montre de même $a+c = b\sqrt{2}$ et $b+c = a\sqrt{2}$. La somme des trois égalités donne $2(a+b+c) = (a+b+c)\sqrt{2}$ donc $a + b + c = 0$, ce qui est absurde car le triangle n'est pas ponctuel.
NB: Quid du cas où O est strictement en-dehors de ABC? Le même raisonnement donne $x^4 + 4(1 - \alpha^2)x^2 + 4(1 + \alpha^4) = 0$, avec un discriminant $\Delta = -32\alpha^2 < 0$ donc aucune solution: ce cas est exclu, youpi

c'est ça en moins à examiner.
Maintenant que nous savons notre triangle isocèle, supposons que c'est en B et déterminons ses proportions exactes. Soient J et K les milieux respectifs de AC et BC. A une homothétie près, on peut prendre $b = JC = 1$. Posons $x = OJ$ et $y = OK$. Alors:

$$\begin{array}{rcl} OF = OH & \Longleftrightarrow & (2a+y)^2 + a^2 = (x+2)^2 + 1^2 \\ & \Longleftrightarrow & y^2 + 4ay + 5a^2 = x^2 + 4x + 5 \end{array}$$

Or $(2a)^2 = (r+x)^2 + 1$ et $r^2 = x^2 + 1$ donc $a^2 = \frac{r}{2}(r+x)$.
Et aussi $y^2 = r^2 - a^2 = \frac{r}{2}(r-x)$.
Alors $4ay = 4\sqrt{a^2y^2} = 2r\sqrt{r^2 - x^2}$. Or $r^2 - x^2 = 1$ donc $4ay = 2r$.
En réinjectant tout cela dans l'équation, il vient:

$$\begin{array}{rcl} OF = OH & \Longleftrightarrow & \frac{1}{2}(r^2 - rx) + 2r + \frac{5}{2}(r^2 + rx) = x^2 + 4x + 5 \\ & \Longleftrightarrow & 3r^2 + 2rx + 2r = x^2 + 4x + 5 \\ & \Longleftrightarrow & 3(1+x^2) + 2x\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{1+x^2} = x^2 + 4x + 5 \\ & \Longleftrightarrow & (x+1)\sqrt{1+x^2} = 1 + 2x - x^2 \\ & \Longleftrightarrow & (x+1)^2(1+x^2) = (1+2x-x^2)^2 \quad \text{et} \quad 1 + 2x - x^2 \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow & 6x^2 - 2x = 0 \quad \text{et} \quad 1 + 2x - x^2 \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow & x(3x^2 - 1) = 0 \quad \text{et} \quad 1 + 2x - x^2 \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Le cas $x = 0$ donne $r = \sqrt{1+x^2} = 1$ et $a = \frac{1}{2}\sqrt{2r(r+x)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, et alors ABC est rectangle isocèle en B.
Le cas $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donne de même $a = 1$ et ABC est équilatéral.
Voilà donc pour le caractère nécessaire de la condition.
• Un calcul simple de OD,OF et OH montre que la condition est suffisante. ∎
Remarque : Déterminer les proportions du triangle menait a priori a une équation des plus rébarbatives. Mais on pouvait se rassurer en notant que ce serait un polynôme, et que la condition à démontrer en fournissait deux racines.

2 Problèmes d'analyse

2.1 Inégalité exponentielle

Exercice 2.1 (Concours général 1996) • *Etudier sur* $]0, +\infty[$ *la fonction* x^x.
• *Montrer que pour* x *et* y *réels strictement positifs,* $x^y + y^x > 1$

Solution : • La fonction $f : x \to x^x$ est strictement décroissante puis strictement croissante, avec un minimum en e^{-1} qui vaut $m = e^{-\frac{1}{e}}$, une limite 1 en 0 et une limite $+\infty$ en $+\infty$.
• (i) Comme x et y jouent des rôles symétriques, on peut supposer $y \leq x$.
• (ii) Si $x \geq 1$ alors $x^y \geq 1$. Or $y^x > 0$ donc $x^y + y^x > 1$
• (iii) Reste le cas $x < 1$. Un premier cas $y \geq e^{-1}$ est assez simple. En effet, $x^x \geq e^{-\frac{1}{e}} \geq 1 - \frac{1}{e}$. Alors $y + x^x \geq 1$. Or $y^x > y$ (car $x \in]0 \quad 1[$) et $x^y > x^x$ (car $y \leq x < 1$). D'où le $x^y + y^x > 1$ cherché.

• (iv) Le cas restant $0 < y < e^{-1}$ est un tout petit peu plus technique. Fixons y. On étudie alors la fonction $f : x \longrightarrow x^y + y^x$, continue sur $[0 \quad 1]$, dérivable sur $]0 \quad 1[$ avec $f'(x) = yx^{y-1} + \ln(y)y^x$.

$$\begin{array}{rcll} f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow & x^{y-1} \geq -\ln(y)y^{x-1} & \\ & \Leftrightarrow & (y-1)\ln(x) \geq \ln(\ln(\frac{1}{y})) + (x-1)\ln(y) & \text{car} \quad \ln(\frac{1}{y}) = -\ln(y) > 0 \\ f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow & g(x) \geq \ln(\ln(\frac{1}{y})) & \text{avec} \quad g(x) = (y-1)\ln(x) - (x-1)\ln(y) \quad (*) \end{array}$$

Etudions g, continue et dérivable sur $]0 \quad 1[$. $g'(x) = \frac{y-1}{x} - \ln(y)$. Donc $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq a$ avec $a = \frac{y-1}{\ln(y)}$.
Or $0 \geq y - 1 > \ln(y)$ donc $0 < a < 1$. Donc g décroît strictement sur $]0 \quad a]$ et croît strictement sur $[a \quad 1[$.
Des limites $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$, on déduit que $g(a) < 0$. De plus $y < e^{-1}$ donc $\ln(\ln(\frac{1}{y})) > 0$ et l'équation $(*)$ $\quad g(x) = \ln(\ln(\frac{1}{y}))$ admet une unique racine α dans $]0 \quad 1[$.
Donc $g(x) - \ln(\ln(\frac{1}{y})) > 0$ sur $]0 \quad \alpha[$, $g(x) - \ln(\ln(\frac{1}{y})) < 0$ sur $]\alpha \quad 1[$, de même que f'.

Donc f croît sur $]0 \quad \alpha[$ et décroît sur $]\alpha \quad 1[$.
Or les limites respectives de $f(x) = x^y + y^x$ en 0 et 1 sont 1 (car $y^0 = 1$) et $1 + y$ (car $1^y = 1$ et $y^1 = y$).
En particulier $f(x) > 1$ pour $x \in]0 \quad 1[$, ce qui conclut notre cas (*iv*).

Les cas (*i*) à (*iv*) couvrent toutes les valeurs de x et y concernées, donc ouf et CQFD. ∎
Remarque : Solution trouvée 15 ans après avoir pris connaissance du problème. Pourquoi autant de temps pour une preuve somme toute élémentaire?
Sans doute à cause d'une recherche trop exclusive de majorations astucieuses dans le style de (*iii*), puis d'une volonté d'appliquer la même méthode sur tout le carré $]0 \quad 1[$, alors que le point (*iv*), efficace si $y < e^{-1}$, se complique inutilement pour d'autres valeurs.
Reprendre régulièrement l'étude d'un problème est vain si l'on reproduit la même démarche vouée aux mêmes blocages: mieux vaut essayer ce que l'on n'avait pas osé aborder la fois d'avant, au moins pour voir.

2.2 Traversée du désert

Exercice 2.2 (Traversée de désert) *Un automobiliste doit parcourir* 1400 *km d'une route désertique sans station service, mais il ne peut pas embarquer pour plus de* 840 *km de carburant. Heureusement il dispose d'autant d'essence et de bidons qu'il veut au point de départ, et il peut constituer en toute sécurité des stocks à n'importe quel point du trajet. En supposant qu'il s'y prenne au mieux, combien de km aura-t-il parcourus exactement avant d'arriver à la fin de la route?*

Remarque : Que veut dire "au mieux"? C'est ce qu'il faut absolument déterminer, car mettre toutes les possibilités en équation est irréaliste.
Solution : En suivant la stratégie optimale que décrit le lemme ci-dessous, stocker une unité à 840km de l'arrivée, une autre $840/3 = 280$km avant, une autre $840/5 = 168$km avant. Parcourir les $1400 - 840 - 280 - 168 = 112$ premiers km 7 fois.
Au total, on parcourt: $840 + 380 * 3 + 168 * 5 + 7 * 112 = 840 + 840 + 840 + 784 = 3304$km. ∎

Lemme 2.3 (stratégie optimale) *Prenons l'autonomie (=840 km) pour unité de distance. Prenons la quantité de carburant correspondante pour unité de volume.*
Changeons de point de vue en cherchant plutôt la position des stocks en fonction de la quantité de carburant qu'ils contiennent. Appelons:
- x_n *la distance entre l'arrivée et le n-ième stock avant elle* ($x_0 = 0$).
- q_n *la quantité de carburant dans le n-ième stock avant l'arrivée* (q_0 *étant ce qui reste à l'arrivée).*
- d_n *la distance* $x_{n+1} - x_n$

Alors dans la disposition optimale:
- $q_n = n$ *unités de carburant (si n n'est pas le dépôt du point de départ).*
- *Ce carburant est apportés en* $2q_n + 1$ *trajets de longueur* d_n.
- *Si* q_{n+1} *est entier alors* $d_n = \frac{1}{2n+1}$..

Preuve : • On admettra facilement que la voiture ne se déplace qu'entre le dernier stock atteint et le stock en cours de constitution, et que la suite $(q_i)_{i\geq 0}$ est strictement croissante.
- Remarquons aussi $q_0 = 0$ (sinon on pourrait encore avancer avec le carburant non-brûlé: absurde).
- Par définition de d_n: $d_n \leq 1$. Comme on vide un stock pour constituer le suivant, la distance d_n de l'un à l'autre est parcourue un nombre impair $2m + 1$ de fois, i.e. $q_{n+1} - q_n = d_n(2m + 1)$. Or un dépôt de taille q_{n+1} ne peut pas être constitué en moins de $\lceil q_{n+1} \rceil$ trajets aller, donc $m \geq \lceil q_{n+1} \rceil$. La conso est minimale quand m l'est, donc $m = \lceil q_{n+1} \rceil$.
- (*) Première conséquence: si $]q_i, q_{i+1}[$ contient un entier M, alors un dépôt intermédiaire de taille M permet de moins consommer.
- (**) Seconde conséquence: si $]q_i, q_{i+2}]$ ne contient pas d'entier, alors $\lceil q_{i+1} \rceil = \lceil q_i \rceil$, donc une disposition optimale comporte le même nombre de trajets entre x_{i+2} et x_{i+1} qu'entre x_{i+1} et x_i, donc on peut se passer du dépôt intermédiaire x_{i+1}.
- On déduit de (*) et (**): il existe une disposition optimale où les stocks qui suivent celui de départ ont des capacités entières.
- Bilan: q_0,q_1,...,q_{N-1} sont des entiers consécutifs. Quant au stock de départ q_N, il vérifie en tout cas $q_N - q_{N-1} \leq 1$

- Par récurrence: $q_i = i$ si $i < N$, et $N - 1 < q_N \leq N$.
- Comme $q_{n+1} - q_n$ est consommé en $(2n + 1)$ trajets , $d_n = \frac{1}{2n+1}$ pour $n \leq N - 1$. ■

Remarque : La divergence de la série harmonique fait qu'il existe une disposition optimale, quelle que soit la distance x_N entre le départ et l'arrivée.

3 Arithmétique

3.1 Système somme-produit impossible?

Exercice 3.1 (Le problème impossible) *On choisit deux nombres entiers, compris entre* 2 *et* $N = 100$*, et on donne leur produit à Pierre, leur somme à Simon. Chacun doit tenter de trouver les deux nombres, sans dévoiler l'information qui lui a été remise. Voici le dialogue:*
- (A_1) *Pierre: Le produit me suffit pas*
- (A_2) *Simon: Je le savais!*
- (A_3) *Pierre: Alors je connais les deux nombres*
- (A_4) *Simon: Alors moi aussi!*

Vous qui avez tout entendu, sauriez-vous trouver les deux nombres en question?

Remarque : Ce problème, posé en 1969 par le mathématicien allemand Feudenthal, a été popularisé sous le titre *Problème impossible* par Martin Gardner, tant il nous fournit peu d'informations. Et pourtant...

Solution : Appelons a et b les deux nombres, puis posons $p = ab$ et $s = a + b$. Décortiquons chaque phrase du dialogue:
- (A_1) p ne suffit pas à trouver les deux nombres. Donc p n'est pas décomposable de façon unique en $p = ab$ tel que $2 \leq a \leq N$ et $2 \leq b \leq N$.
- (A_2) La somme s suffit à savoir cela. Donc s n'est pas de la forme $a + b$ avec a et b premiers et $2 \leq a \leq N$ et $2 \leq b \leq N$.

Soit S l'ensemble des sommes qui satisfont (A_2) et (A_1).
- (A_3) Alors p permet de trouver ces deux nombres. Donc parmi toutes les décompositions $p = ab$ possible, une seule correspond à une valeur $s = a + b$ dans S. Pour tout s dans S, notons $L(s)$ la liste des produits $p = ab$ tels que $s = a + b$ et tels que p ne corresponde à aucune autre somme dans S.
- (A_4) Alors s permet de trouver ces deux nombres. Donc $L(s)$ a un unique élément.

Déduisons-en quelques remarques pour faciliter les recherches:

- (B_1) a et b ne sont pas tous deux premiers, ni de la forme $b = a^2$ avec a premier (alors $p = a^3$ qui ne se décompose qu'en $p = a \times a^2$).

Enfin, p n'a pas de facteur premier supérieur à $N/2$, car un tel facteur serait forcément a ou b.
- (B_2) s n'est ni somme de deux premiers, ni de la forme $s = a + a^2 = a(a + 1)$ avec a premier.

La conjecture de Goldbach implique que S ne contient aucun nombre pair. Cela exclue aussi le cas $s = a + a^2 = a(a + 1)$ car s serait alors pair. Le fait que s soit impair implique que a et b soient distincts. On supposera donc par la suite $2 \leq a < b$.
Soit K le plus petit nombre premier plus grand que $N/2$ (ici $K = 53$). Alors $s \leq K + 2$, sinon Simon envisagerait le cas $a = K$,$b = s - K$ pour lequel $p = K(s - K)$, ce qui d'après (B_1) l'empêcherait de savoir que le produit ne suffit pas à Pierre.

Recherchons à présent les solutions:

- (C_2) Les considérations en B_2 permettent de remplir S avec les nombres impairs s, inférieurs à $K + 2 = 55$, tels que $s - 2$ ne soit pas premier.

$S = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53\}$
- (C_3) Calculons $L(s)$ pour chaque élément de S. C'est la liste des produits $2(s - 2)$,$3(s - 3)$,... d'où il suffit d'éliminer les produits qui correspondent à au moins 2 éléments de S.

$L(11) = \{18, 24, 28, \cancel{30}\}$
$L(17) = \{\cancel{30}, \cancel{42}, 52, \cancel{60}, \cancel{66}, \cancel{70}, \cancel{72}\}$
$L(23) = \{\cancel{42}, \cancel{60}, 76, \cancel{90}, \cancel{102}, 112, \cancel{120}, \cancel{126}, \cancel{130}, \cancel{132}\}$
...

En effet, $30 = 5 \times 6 = 2 \times 15$ et $5 + 6 = 11 \in S$ et $2 + 15 = 17 \in S$, donc 30 est exclu de tous les $L(s)$.
De même $66 = 6 \times 11 = 2 \times 33$ et $6 + 11 = 17 \in S$ et $2 + 33 = 35 \in S$, etc.
- (C_4) Seul $L(17)$ contient un et un seul élément: $52 = 4 \times 13$. $L(11)$ et $L(23)$ en contiennent au moins 2.

Donc à ce stade de la recherche la seule solution connue est $s = 4 + 13 = 17$ et $p = 4 \times 13 = 52$. ■
Remarque : Changer la valeur de N change le nombre des solutions, car (B_1) et (B_2) montrent que Pierre et Simon en tiennent compte dans leurs réflexions (A_1) et (A_2). Ainsi:
- Pour $N \leq 35$ il n'y a aucune solution
- Pour $36 \leq N \leq 437$ la seule solution est $(a, b) = (4, 13)$.
- Pour $N = 438$ on a deux solutions $(a, b) \in \{(4, 13); (4, 61)\}$.

Remarque : Encore quelques propriétés qui peuvent accélérer une recherche informatique:
- Les valeurs de S de la forme $s = a + b$ sont impaires, donc la recherche des décompositions $p = ab$ peut se limiter aux cas où tous les facteurs pairs de p sont concentrés dans a ou dans b. Par exemple pour $112 = 2^4 \times 7$, la seule somme $s = a + b$ impaire est celle où $b = 2^4 = 16$ et $a = 7$.
- Savoir que le nombre d'éléments $|L(s)|$ dépasse 1 suffit à exclure cette valeur de s des solutions du problème. C'est le cas pour $L(23)$, que l'on peut exclure sachant que les produits 76 et 112, au moins, sont dedans.
- Pour un produit donné, la décomposition en plus grands facteurs apparaît pour la plus petite somme.
- Pour un s donné, les produits de la forme $2(s-2)$,$3(s-3)$,etc. croissent de plus en plus lentement, avec des intervalles $s - 5$, $s - 7$, ..., 2. Voir par exemple $L(23)$ où les intervalles avant élimination sont $18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2$

4 Problèmes de calendrier

Les irrégularités du calendrier intimident quiconque calcule des jours et des dates.
Cependant, y réfléchir sereinement donne des formules relativement simples.
Dans ce qui suit, on représentera les dates par des triplets (y, m, d) correspondant respectivement à l'année, au mois et au jour.
Comme dans la vie courante, le mois 1 correspond à janvier et le jour 1 est bien le premier du mois.
Quant aux jours de la semaine, nous les numéroterons de 0 à 6 pour calculer simplement modulo 7.
Enfin, on ne supposera que le calendrier est entièrement grégorien depuis une année fictive 0: l'adaptation au calendrier julien et à la période pré-1585 n'apporte pas grand-chose et est laissée au lecteur.

4.1 Vendredi 13

Exercice 4.1 (Vendredi 13) *Combien une année compte-t-elle, au maximum, de vendredi 13?*

Solution : Il suffit de compter les jours de décalage entre les mois, avec comme référence le premier janvier. Le décalage d'un mois ajouté à sa durée donne le décalage du mois suivant. Prendre la valeur modulo 7 donne alors le décalage au sein de la semaine.
Appliquons cela à une année normale non-bissextile:

	Jan	*Fev*	*Mar*	*Avr*	*Mai*	*Jun*	*Jul*	*Aou*	*Sep*	*Oct*	*Nov*	*Dec*
Jours	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
Deca relatif	3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3
Deca cumulé	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Les mois ayant le même décalage sont ceux où le 13 du mois tombe le même jour de la semaine.
Or la valeur la plus fréquente, 3, apparaît trois fois. Une année non-bissextile a donc au plus trois vendredi 13, en février, mars et novembre.
Pour une année bissextile les décalages augmentent de 1 après février:

	Jan	*Fev*	*Mar*	*Avr*	*Mai*	*Jun*	*Jul*	*Aou*	*Sep*	*Oct*	*Nov*	*Dec*
Deca cumulé	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

C'est 0 qui est le plus fréquent, avec trois occurrences: une année bissextile a donc au plus trois vendredi 13, en janvier, avril et juillet. ■

4.2 Intervalle entre deux dates

Exercice 4.2 (Différence de dates) *Combien de jours se sont-ils écoulés entre deux dates* (y_1, m_1, d_1) *et* (y_2, m_2, d_2) *?*

Solution : Numérotons les jours par une fonction $f(y, m, d)$, qui s'incrémente de 1 du jour au lendemain. On peut décomposer $f(y, m, d) = n(y) + k(y, m, d)$ où:

- $n(y) = f(y, 1, 1) - f(0, 1, 1)$: $n(y)$ compte les jours d'un premier janvier à l'autre.
- $k(y, m, d) = f(y, m, d) - f(y, 1, 1)$: $k(y, m, d)$ compte les jours écoulés depuis le premier janvier de l'année y.

Calculer $k(y, m, d)$ est trivial et ne sera pas détaillé: il suffit de savoir si y est bissextile et de consulter un tableau ad-hoc.
Passons au calcul de $n(y)$. Les années écoulées font 365 jours, plus 1 si elles sont bissextiles, i.e si elles sont multiples de 4, sauf les multiples de 100, sauf les multiples de 400.
La différence $n(y) - n(y - 1)$ doit donc valoir 365, plus 1 si $y - 1$ est multiple de 4, moins 1 si $y - 1$ est multiple de 100, plus 1 si $y - 1$ est multiple de 400, ce qui permet de prendre:

$$n(y) = 365y + \left\lfloor \frac{y-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y-1}{400} \right\rfloor$$

Nous avons donc les deux composantes n et k de $f(y, m, d)$, et la différence en jours entre les deux dates est donnée par: $f(y_2, m_2, d_2) - f(y_1, m_1, d_1)$ ■

4.3 Jour de la semaine

Exercice 4.3 (Jour de la semaine) *A quel jour de la semaine correspond une date donnée ?*

Solution : Notons $j(y, m, d)$ la fonction qui donne l'index du jour de la semaine.
Alors $j(y, m, d) = f(y, m, d) - f(0, 1, 1) + j(0, 1, 1) \bmod 7$. Avec les notations de l'exercice précédent (4.2 page 7), on cherche donc à calculer $f'(y, m, d) = f(y, m, d) \bmod 7$. Posons:

- $n'(y) = n(y) \bmod 7$
- $k'(y, m, d) = k(y, m, d) \bmod 7$

En repartant de la valeur de n donnée précédemment et en prenant le modulo 7:

$$n'(y) = \left(y + \left\lfloor \frac{y-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y-1}{400} \right\rfloor \right) \bmod 7$$

Quant à $k'(y, m, d)$, on peut le décomposer en $k'(y, m, d) = l(y, m) + (d-1) \bmod 7$ où $l(y, m) = k'(y, m, 1) \bmod 7$.
Le calcul de $l(y, m)$ se déduit du tableau suivant récupéré sur le problème des vendredi 13:

	Jan	*Fev*	*Mar*	*Avr*	*Mai*	*Jun*	*Jul*	*Aou*	*Sep*	*Oct*	*Nov*	*Dec*
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$l(y, m)$standard	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
$l(y, m)$bissextile	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

En remarquant $f'(0, 1, 1) = n'(0)$, le jour de la semaine est donné par $j(y, m, d) = n'(y) + k'(y, m, d) + L \bmod 7$ où $L = j(0, 1, 1) - n'(0) - k'(0, 1, 1) \bmod 7$ est une constante.
Pour avoir L, appliquons la recette au samedi $(2015, 10, 17)$ où cette solution a été apportée. Alors $j(2015, 10, 17) = 6 + L \bmod 7$. Or le samedi vaut 5 donc modulo 7: $L = 5 - 6 = 6 = -1$.
En remarquant d'autre part que l'égalité $28 = 4 \times 7$ entraîne $\lfloor \frac{y-1}{4} \rfloor = \left\lfloor \frac{(y-1) \bmod 28}{4} \right\rfloor \bmod 7$, on arrive à un calcul mental simple de $j(y, m, d)$ pour impressionner ses petits (ou moins petits) camarades:

- calculer $(y - 1) \bmod 28$
- ajouter la partie entière du quart de cette valeur.
- retirer $(y - 1)/100$, puis ajouter $(y - 1)/400$: cela donne le jour du $(y, 1, 1)$.
- ajouter $l(y, m)$, par cœur comme si y était une année standard
- ajouter 1 si y est bissextile et si $m >= 3$: cela donne le jour du $(y, m, 1)$
- ajouter $d - 1$ et prendre le modulo 7: c'est $j(y, m, d)$ et on peut conclure sous les regards ébahis. ■