Résultats géométriques élémentaires

Gaëtan Bayle des Courchamps

Janvier 2003
(révision 20 Juillet 2011)

Table des matières

1 Angles orientés

1.1 Théorèmes de l'angle inscrit et de la tangente

Théorème 1.1 (Théorème de l'angle inscrit) *Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et soient A et B deux points sur ce cercle. Alors pour tout point $M \in \mathcal{C}$:*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$$

Preuve : Les triangles AOM et AOB étant isocèles en O, on a les relations

$$\begin{cases} \pi = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) & \pmod{2\pi} \\ \pi = 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) & \pmod{2\pi} \end{cases}$$

En additionnant ces deux relations modulo 2π, on obtient

$$\begin{array}{rcll} 2\pi & = & 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) & \pmod{2\pi} \\ 0 & = & 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) & \pmod{2\pi} \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) & = & 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) & \pmod{2\pi} \end{array}$$

C'est bien ce qu'on cherche. ∎

Théorème 1.2 (Théorème de la tangente) *Soient A et B sont deux points distincts sur un cercle de centre O, soit M un point du cercle et appelons Δ la tangente au cercle en A. Alors pour tout point T distinct de A :*

$$\begin{array}{rcll} T \in \Delta & \iff & 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) & \pmod{2\pi} \\ & \iff & (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) & \pmod{\pi} \end{array}$$

Preuve : Par définition de la tangente Δ :

$$\begin{array}{rcll} T \in \Delta & \iff & (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AT}) = \frac{\pi}{2} & \pmod{\pi} \\ & \iff & (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) = \frac{\pi}{2} & \pmod{\pi} \\ & \iff & 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) = \pi & \pmod{2\pi} \end{array}$$

Or AOB est isocèle en O, donc $2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \pi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$ d'où :

$$\begin{array}{rclll} T \in \Delta & \iff & \pi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) = \pi & \pmod{2\pi} & \\ & \iff & 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) & \pmod{2\pi} & (*) \end{array}$$

D'après le théorème de l'angle inscrit, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ donc :

$$\begin{array}{rclll} T \in \Delta & \iff & 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) & \pmod{2\pi} & \\ & \iff & (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) & \pmod{\pi} & (**) \end{array}$$

Les équivalences $(*)$ et $(**)$ sont bien celles recherchées. CQFD. ■

2 Géométrie du triangle

2.1 Triangle rectangle

Proposition 2.1 *Dans un triangle rectangle de côtés a, b et d'hypothénuse c, on a, avec les notations de la figure 1 :*

$$cx = a^2 \quad ch = ab$$

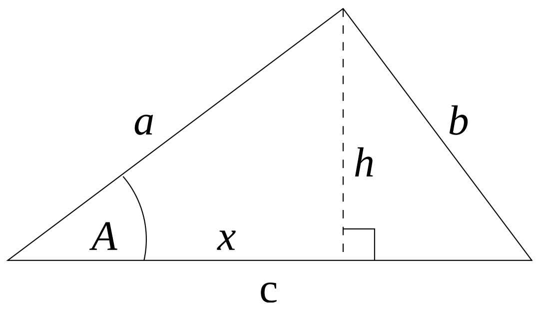

Figure 1: Relations métriques dans un triangle rectangle

Preuve : $cos(A) = \frac{x}{a} = \frac{a}{c}$ donc en multipliant par ac : $cx = a^2$.
En notant $\mathcal{A}$ l'aire du triangle, on a $\mathcal{A} = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$ i.e. $ab = ch$ CQFD. ■

2.2 Relations métriques

2.3 Angles et côtés

Proposition 2.2 (Formule d'Al-Kashi) *Dans un triangles d'angles A, B et C on a la relation :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \cos(A)$$

Preuve : Utilisons les propriétés du produit scalaire : $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$
Or $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(A)$, d'où la relation cherchée. CQFD. ■

Proposition 2.3 (Relation des sinus) *En notant a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle, α, β, γ les angles respectivement opposés à ces côtés, et R le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a la relation :*

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{1}{2R}$$

Preuve : Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle. Soit A' le point diamétralement opposé à C sur $\mathcal{C}$. Alors le triangle $A'BC$ est rectangle en B, et comme A, A', B et C sont cocycliques, on a $\widehat{BA'C} = \widehat{BAC} = \alpha \pmod{\pi}$, donc $\sin(\alpha) = \frac{a}{A'C} = \frac{a}{2R}$ i.e. $\frac{1}{2R} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$.
Il suffit de faire de même pour B et C. ∎

2.4 Longueurs, aires, etc.

Proposition 2.4 (Formule de Héron) *Soit un triangle de côtés a, b, c et d'aire $\mathcal{A}$. Alors :*

$$\begin{aligned} 16\mathcal{A}^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}$$

Ou encore (en posant $p = a+b+c$ et $s = \frac{p}{2}$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\ \mathcal{A} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)} \\ \mathcal{A} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Preuve : Faisons un dessin (figure 2 page 3).

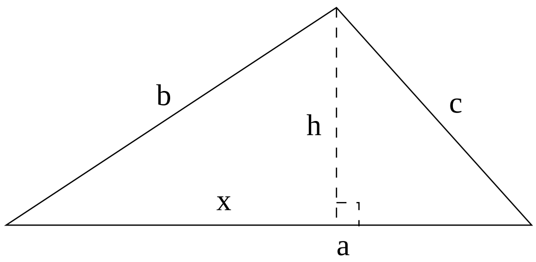

Figure 2: Formule de Héron

Le théorème de Pythagore donne : $\begin{cases} h^2 = c^2 - (a-x)^2 & (1) \\ h^2 = b^2 - x^2 & (2) \end{cases}$
Comme $\mathcal{A} = \frac{ah}{2}$, on a $16\mathcal{A}^2 = 4a^2h^2$ donc d'après (2) : $16\mathcal{A}^2 = 4a^2(b^2 - x^2) = (2ab - 2ax)(2ab + 2ax)$.
Or (1) et (2) donnent $c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$ d'où $2ax = a^2 + b^2 - c^2$.
Donc $\begin{cases} 2ab - 2ax &= 2ab - a^2 - b^2 + c^2 &= c^2 - (a-b)^2 &= (c+a-b)(c-a+b) \\ 2ab + 2ax &= 2ab + a^2 + b^2 - c^2 &= (a+b)^2 - c^2 &= (a+b+c)(a+b-c) \end{cases}$
D'où $16\mathcal{A}^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ qui est le résultat cherché. CQFD. ∎

Proposition 2.5 (Rayon du cercle circonscrit) *Soit un triangle d'aire $\mathcal{A}$, avec des côtés de longueur a, b et c, et soit R le rayon de son cercle circonscrit. Alors :*

$$R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$$

Preuve : Pour fixer les idées et les notations commençons par un beau dessin (figure 3 page 4).
Le côté de longueur a est vu sous l'angle α au sommet du triangle, et sous l'angle 2α depuis le centre du cercle circonscrit (d'après le théorème de l'angle inscrit). Le rayon du cercle est R.
Appliquons deux fois la relation d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) && (1) \\ a^2 &= R^2 + R^2 - 2R^2\cos(2\alpha) && (2) \end{aligned}$$

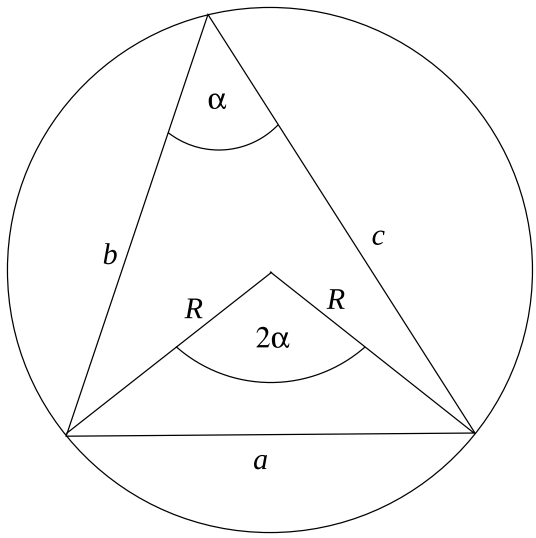

Figure 3: Rayon du cercle circonscrit

En remplaçant $\cos(2\alpha)$ par $2\cos^2(\alpha) - 1$ et en multipliant (2) par b^2c^2 il vient $a^2b^2c^2 = 4R^2b^2c^2 - 4R^2b^2c^2\cos^2(\alpha)$.
Or d'après (1) on a $2bc\cos(\alpha) = a^2 - b^2 - c^2$ donc on peut remplacer $4b^2c^2\cos^2(\alpha)$ par $(a^2 - b^2 - c^2)^2$, ce qui donne :

$$a^2b^2c^2 = R^2(4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2)$$

Il ne reste plus qu'à factoriser tout ça à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2 &= R^2(2bc - (a^2 - b^2 - c^2))(2bc + (a^2 - b^2 - c^2)) \\ &= R^2((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\ &= R^2(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'une des versions de la formule de Héron : $16\mathcal{A}^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$, ce qui donne $a^2b^2c^2 = 16\mathcal{A}^2R^2$ et permet de conclure en prenant la racine carrée. CQFD. ∎

Proposition 2.6 (Rayon du cercle inscrit) *Dans un triangle de côtés a, b, c et d'aire $\mathcal{A}$, le rayon r du cercle inscrit vaut $\frac{2\mathcal{A}}{a+b+c}$.*

Preuve : Soit O le centre du cercle inscrit. Regardons la figure 4 page 4.

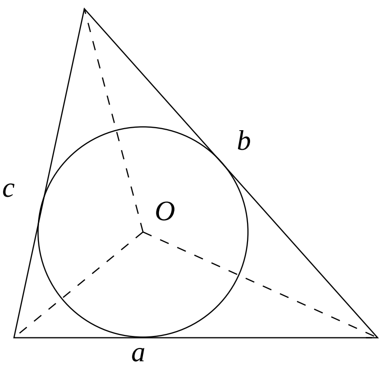

Figure 4: Rayon du cercle inscrit

Le triangle peut alors être découpé en trois triangles de sommet commun O, de hauteur r et de bases respectives a, b et c. En additionnant les aires $\frac{ar}{2}$, $\frac{br}{2}$ et $\frac{cr}{2}$ de ces trois triangles, on obtient $\mathcal{A} = \frac{r}{2}(a+b+c)$. CQFD. ∎

Lemme 2.7 (Equation $aAM = bBM$) *Soient A et B deux points distincts, et a et b deux nombres > 0 distincts. Alors l'ensemble des points M tels que $aAM = bBM$ est le cercle de diamètre $[GH]$, où $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ et $a\overrightarrow{HA} - b\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$.*

Preuve : On a $aAM = bBM \Leftrightarrow a^2AM^2 = b^2BM^2 \Leftrightarrow (a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB})(a\overrightarrow{MA} - b\overrightarrow{MB})$.
Or $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ et $a\overrightarrow{MA} - b\overrightarrow{MB} = (a-b)\overrightarrow{MH}$, donc :

$$aAM = bBM \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\overrightarrow{MH} = 0$$

i.e. M appartient au cercle de diamètre GH. CQFD. ∎

Lemme 2.8 (Somme $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$) *Soient trois nombres a, b, c, trois points A, B et C, un point M et posons $f(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$.
Alors :*

- *Si $a + b + c \neq 0$, alors $f(M) = f(G) + (a + b + c)GM^2$, avec $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = 0$.*
- *Si $a + b + c = 0$, alors pour tout point G, $f(M) = f(G) + 2\overrightarrow{GM}(a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BG} + c\overrightarrow{CG})$.*

Preuve : Pour tout point G, on a $f(M) = a(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM})^2 + b(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM})^2 + c(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM})^2 = (aAG^2 + bBG^2 + cCG^2) + 2\overrightarrow{GM}(a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BG} + c\overrightarrow{CG}) + (a + b + c)GM^2$.
Si $a + b + c = 0$ on se trouve dans le second cas, sinon on choisit G tel que $a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BG} + c\overrightarrow{CG} = 0$ et on retrouve le premier cas. CQFD. ∎

3 Quadrilatères

Théorème 3.1 (Relation de Ptolémée) *Soit un quadrilatère inscrit dans un cercle. Alors, avec les notations de la figure 5 page 5:*
$(ab + cd)x^2 = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)$

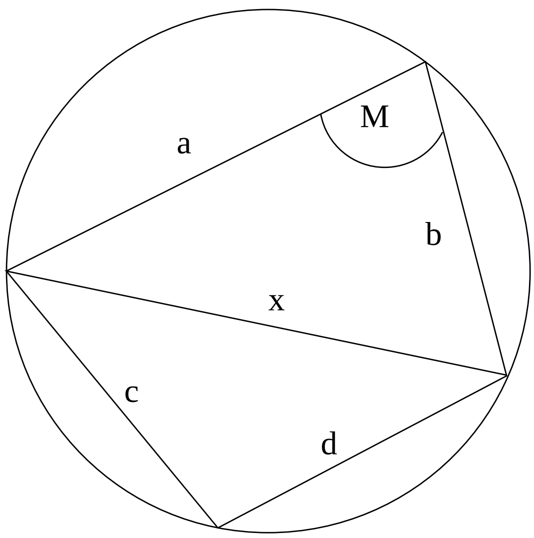

Figure 5: Relation de Ptolémée

Preuve : D'après les relations de cocyclicité, l'angle en face de M est $\pi - M$. On applique deux fois la formule d'Al-Kashi pour obtenir

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(M) && (1) \\ x^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi - M) && (2) \end{aligned}$$

Multiplions (1) par cd, puis (2) par ab, et additionnons les résultats. Il suffit alors de remarquer que $\cos(\pi - M) = -\cos(M)$ pour faire disparaître les cosinus et obtenir le résultat souhaité. ∎

4 Problèmes de construction

4.1 Constructions de longueurs

Lemme 4.1 (Construction des moyennes arithmétique, géométrique, harmonique) *Construisons, comme sur la figure 6 page 6, $[AB]$ tel que $AB = a + b$, soit $H \in [AB]$ tel que $AH = a$ et $HB = b$. Soit O le milieu de $[AB]$; Construisons un demi-cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, puis son intersection C avec la perpendiculaire en H à (AB). Soit enfin I le projeté orthogonal de H sur (OC).*
Alors en posant $h = HC$ et $l = CI$, on a les relations suivantes :

$$h^2 = ab \quad \text{et} \quad \frac{2}{l} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Preuve :

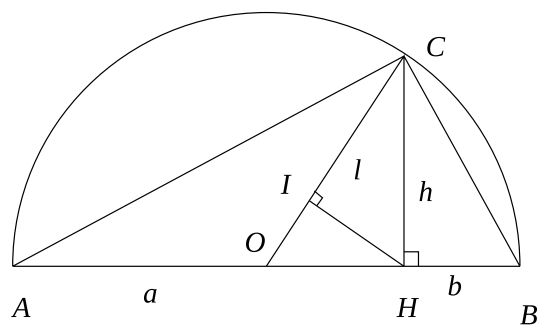

Figure 6: Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

Le demi-cercle a $[AB]$ pour diamètre, donc ACB est rectangle en C donc d'après le lemme 2.1 page 2, on a $h^2 = ab$.
Les triangles OHC et IHC sont tous deux rectangles, et ils ont le même angle C, donc $CI/CH = CH/CO$ d'où $CI = CH^2/CO$. Or $CI = l$, $CH^2 = h^2 = ab$ et $CO = \frac{1}{2}(a + b)$ donc $l = \frac{2ab}{a+b}$ ou encore $\frac{2}{l} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. CQFD. ■

4.2 Constructions au compas

Exercice 4.2 (Une solution au problème de Napoléon) *On a tracé un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r. Il s'agit d'en trouver le centre, à l'aide du compas seul.*

- *Prendre un point $A \in \mathcal{C}$, et tracer un cercle $\mathcal{C}_0$, de centre A et de rayon compris dans $]\frac{r}{2}, r[$, coupant $\mathcal{C}$ en B et en C.*
- *Soit D l'intersection des cercles de centres B et C qui passent par A.*
- *Soient E et F les intersections du cercle de centre D passant par A avec $\mathcal{C}_0$.*
- *Soit O l'intersection des cercle de centres E et F passant par A.*

Montrer que O est le centre de $\mathcal{C}$.

Solution : Tout d'abord, (AD) est axe de symétrie de la figure 7 page 7 qui illustre la contruction.

En particulier A, O et D sont alignés.
Le triangle AOE est isocèle en E donc $\widehat{AOE} = \widehat{OAE}$
Le triangle ADE est isocèle en D donc $\widehat{DAE} = \widehat{DEA}$
Or A, O et D sont alignés donc on peut poser $\alpha = \widehat{AOE} = \widehat{DAE}$.
Alors $\left\{ \begin{array}{lllll} \widehat{AOE} & = & \widehat{OAE} & = & \alpha \\ \widehat{DAE} & = & \widehat{DEA} & = & \alpha \end{array} \right.$ donc les triangles DEA et EAO sont semblables, i.e. $\frac{AE}{AD} = \frac{AO}{AE}$.
Or $AE = AB$ donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AO}{AB}$
Or $\widehat{BAO} = \widehat{BAD}$ donc les triangles AOB et ABD sont semblables.
Or ABD est isocèle en B donc AOB l'est en O i.e. $OA = OB$.
Donc O appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

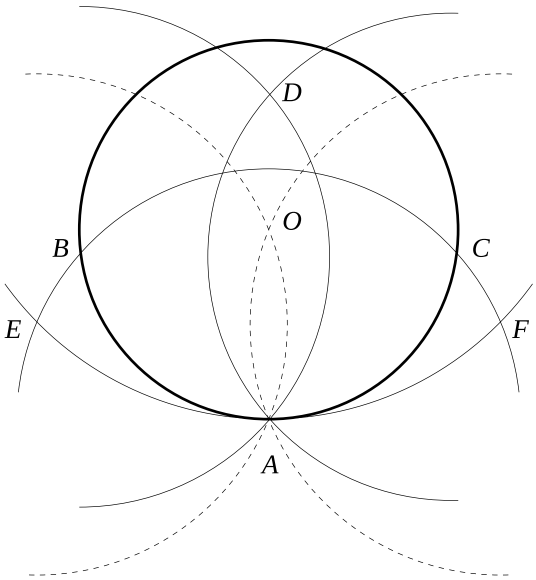

Figure 7: Problème de Napoléon

De même O appartient à la médiatrice de $[BC]$.
Or $[AB]$ et $[BC]$ sont des cordes non-parallèles de $\mathcal{C}$, donc O est le centre de $\mathcal{C}$. CQFD. ∎

Théorème 4.3 (Théorème de Masheroni) *Tout point constructible à la règle et au compas peut être obtenu à l'aide du compas seul.*

Preuve : Il suffit de montrer que l'on peut construire au compas seul :

- l'intersection de deux cercles (évident)
- l'intersection d'une droite et d'un cercle (lemme 4.8).
- l'intersection de deux droites (lemme 4.7 page 8).

La démonstration des deux derniers point fait intervenir deux résultats auxiliaires (montrés eux aussi dans les lemmes qui suivent) : le report d'une distance dans une direction donnée, et la multiplication d'une distance par le quotient de deux autres distances. ∎

Lemme 4.4 (Construction d'un symétrique) *Soient deux points distincts A et B. Soit un point M. Alors le symétrique M' de M par rapport à (AB) peut être obtenu au compas seul.*

Preuve : Traçons les cercles de centres respectifs A et B passant par M. Chacun de ces cercles étant symétrique par rapport à (AB), les points d'intersection le sont aussi : l'un est M, l'autre son symétrique M'. ∎

Lemme 4.5 (Multiplication d'une distance par le quotient de deux autres) *Etant donnés deux points distincts A et B, et deux distances R et R' non-nulles, on peut construire, au compas seul, deux points A' et B' tels que $A'B' = \frac{R'}{R}AB$.*

Preuve : Regardons la figure 8 page 8. [1]
Traçons un cercle C de centre O et de rayon R passant par A et par B, puis le cercle C' de centre O et de rayon r. Soit $A' \in C'$ tel que $A' \notin (OA)$. Construisons $B' \in C'$ tel que $AA' = BB'$ et tel que les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'})$ aient le même sens.

[1] On suppose ici $AB < 2R$. Si ce n'est pas le cas, on multiplie R et R' par un nombre entier de fois assez grand (facile en construisant des parallélogrammes), l'important étant de conserver le rapport $\frac{R'}{R}$.

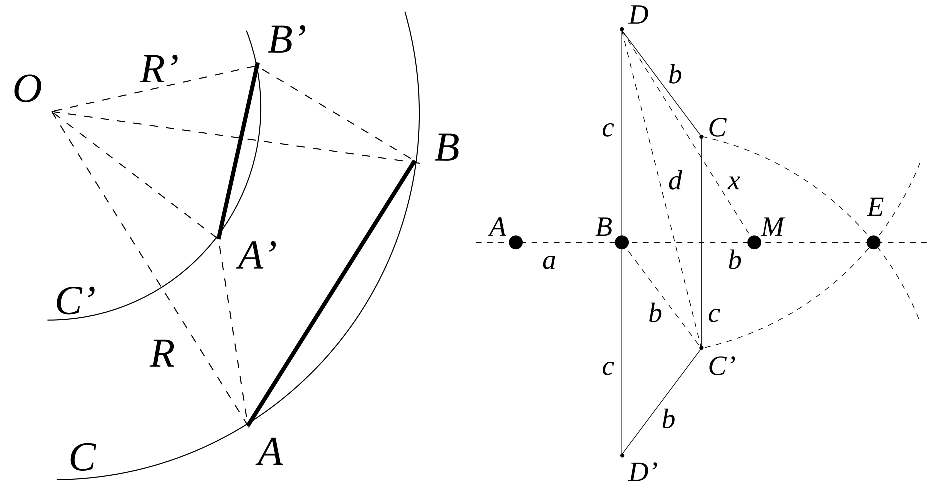

Figure 8: Quotient de deux longueurs; report de longueur

Les triangles OAA' et OBB' ont alors les mêmes dimensions et le même sens : ils sont donc images l'un de l'autre par une rotation de centre O. En particulier $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) \pmod{2\pi}$.
Or AOB et $A'OB'$ sont tous deux isocèles en O, donc ils sont semblables et en particulier $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OB} = \frac{R}{R'}$.
CQFD. ∎

Lemme 4.6 (Report d'une longueur sur une droite) *Soient A, B et C trois points non-alignés. Alors on peut construire, au compas seul, un point $M \in (AB)$ tel que $BM = BC$.*

Preuve : Il fallait trouver la construction ! Regardons la figure 8 page 8.
Soit M un point de (AB) tel que $BM = BC$. Posons $b = BM = BC$. Construisons le symétrique C' de C par rapport à (AB), puis les points D et D' tels que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{C'C}$ et $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{CC'}$. Posons alors $\begin{cases} c &= CC' \\ d &= DC' = D'C \\ x &= DM = D'M \end{cases}$ Par construction, $BCC'D'$ est un parallélogramme [2] donc $C'D' = b$. De même, $CD = b$. Enfin, $DD' = 2CC' = 2c$.
Les segments $[CD]$ et $[C'D']$ sont symétriques par rapport à (AB), donc on C, D, C' et D' sont cocycliques et la relation de Ptolémée donne :

$$d^2(bc + 2bc) = bc(4c^2 + b^2) + 2bc(c^2 + b^2)$$

Après division par $3bc$, on trouve $d^2 = 2c^2 + b^2$
Or DBM est rectangle M donc $x^2 = c^2 + b^2$, d'où $d^2 = x^2 + c^2$, ou encore $x^2 = d^2 - c^2$.
Soit E un point situé à l'intersection des cercles de centres D et D' et de rayon d. Alors le triangle DBE est rectangle en B donc $BE^2 = d^2 - c^2 = x^2$ d'où $BE = x$.
Le point M à construire se situe donc à l'intersection des cercles de centre D et D', et de rayon $x = BE$.
CQFD. ∎
Remarque : Le lecteur attentif (c'est peut-être vous, qui sait ?) aura remarqué que cette construction dégénère si l'angle entre les droites (AB) et (BC) est droit.
On peut contourner ce cas en reportant d'abord la distance sur une droite passant par B, mais pas par A ni par C.

Lemme 4.7 (Intersection de deux droites) *Soient (AB) et (CD) deux droites non-parallèles. Alors leur intersection peut être obtenue à l'aide du compas seul.*

Preuve : Soit M l'intersection recherchée. Si $C \in (AB)$ alors $M = C$. De même si $D \in (AB)$ alors $M = D$.
Sinon, construisons les symétriques respectifs C' et D' de C et D par rapport à (AB). Alors M est

[2] Ce qui permet d'ailleurs de construire D et D' au compas

l'intersection de (CD) et de $(C'D')$.
Supposons $M \in [CD]$ (si ce n'est pas le cas, on s'y ramène en reportant une distance assez grande sur les droites (CD) et $(C'D')$). Par construction, (CD) et $(C'D')$ sont parallèles, donc on peut appliquer le théorème de Thalès : $CM = \frac{CC'}{CC'+DD'}CD$.
D'après les lemmes précédents, on peut, au compas seul, construire la distance CM puis la reporter sur (CD) pour obtenir M.
■

Lemme 4.8 (Intersection d'une droite et d'un cercle) *Soit C un cercle de centre M et de rayon R, et soit une droite (AB). Si elle existe, l'intersection de C et de (AB) peut être obtenue au compas seul.*

Preuve : Limitons-nous au seul cas intéressant : l'intersection existe. Si $M \in (AB)$, il suffit de procéder à un report de distance.
Si $M \notin (AB)$ et si (AB) est tangente à C, alors l'intersection est aussi celle des droites (AB) et (MM') où M' est le symt́rique de M par rapport à (AB).
Sinon les cercles de centres M et M' et de rayon R se coupent en deux points distincts qui, par construction, ne peuvent appartenir qu'à la médiatrice (AB) du segment $[MM']$. En particulier, ce sont les points où le cercle de centre M et de rayon R coupe (AB). ■

4.3 Avec une règle trop courte

Exercice 4.9 (Théorème de Desargues) *Soient trois droites (AA'), (BB') et (CC') concourantes en un point O. Supposons que les intersections $I = (AB) \cap (A'B')$, $J = (AC) \cap (A'C')$ et $K = (BC \cap (B'C')$ existent.*
Montrer que I, J et K sont alignés.

Remarque : En particulier, ce résultat entraîne qu'il est toujours possible de relier deux points par une ligne droite, même avec une règle plus courte que la distance de l'un à l'autre des points.
Solution : Le dessin se trouve sur la figure 9 page 9.

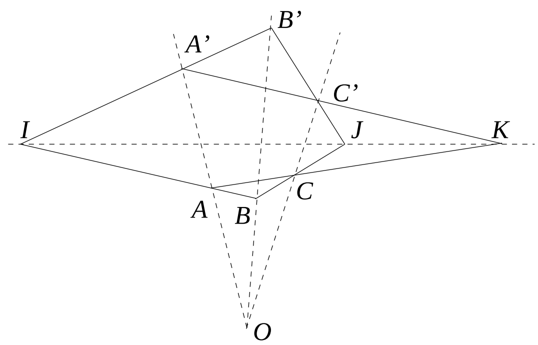

Figure 9: Théorème de Desargues

Soient α, β et γ tels que $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{OC'} = \gamma\overrightarrow{CC'}$.
Si l'on avait $\alpha = \beta$, alors les droites (AB) et $(A'B')$ seraient parallèles donc leur intersection I n'existerait pas : absurde. De même, on montre que les coefficients α, β et γ sont deux à deux distincts.
Par définition de ces mêmes coefficients on a les égalités :

$$\begin{array}{rcll} \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OA'} & = & \overrightarrow{0} & (P_1) \\ \beta\overrightarrow{OB} + (1-\beta)\overrightarrow{OB'} & = & \overrightarrow{0} & (P_2) \\ \gamma\overrightarrow{OC} + (1-\gamma)\overrightarrow{OC'} & = & \overrightarrow{0} & (P_3) \end{array}$$

Comme $\beta \neq \gamma$, on peut définir M tel que :

$$(\beta-\gamma)\overrightarrow{OM} = \beta\overrightarrow{OB} - \gamma\overrightarrow{OC} \quad (E)$$

Alors $(\beta-\gamma)\overrightarrow{BM} = -\gamma\overrightarrow{BC}$ donc $M \in (BC)$.
D'après (P_2), on a $\beta\overrightarrow{OB} = (\beta-1)\overrightarrow{OB'}$ et d'après (P_3) on a $\gamma\overrightarrow{OC} = (\gamma-1)\overrightarrow{OC'}$. Donc d'après (E), on obtient $(\beta-\gamma)\overrightarrow{OM} = (\beta-1)\overrightarrow{OB'} + (\gamma-1)\overrightarrow{OC'}$.
On en tire $(\beta-\gamma)\overrightarrow{B'M} = (\gamma-1)\overrightarrow{C'B'}$. En particulier $M \in (B'C')$.
Or $K = (BC) \cap (B'C')$ donc $M = K$ i.e. $(\beta-\gamma)\overrightarrow{OK} = \beta\overrightarrow{OB} - \gamma\overrightarrow{OC}$.
Après avoir fait de même avec I et J :

$$\begin{array}{rcl} (\beta-\gamma)\overrightarrow{OK} & = & \beta\overrightarrow{OB} - \gamma\overrightarrow{OC} \\ (\gamma-\alpha)\overrightarrow{OJ} & = & \gamma\overrightarrow{OC} - \alpha\overrightarrow{OA} \\ (\alpha-\beta)\overrightarrow{OI} & = & \alpha\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB} \end{array}$$

Sommons : $(\beta-\gamma)\overrightarrow{OK} + (\gamma-\alpha)\overrightarrow{OJ} + (\alpha-\beta)\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{0}$
En décomposant $\overrightarrow{OJ}$ en $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{OI}$ en $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KI}$ on obtient :

$$(\alpha-\beta)\overrightarrow{KI} + (\gamma-\alpha)\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{0}$$

En particulier, les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires, donc les points I, J et K sont alignés. CQFD.

■

Exercice 4.10 (Triangle équilaréral) *Prs̀ d'un triangle équilatéral ABC se trouve un point M tel que $a = MA$, $b = MB$ et $c = MC$.*
Quel est le côté x du triangle ? A quelle condition sur a, b, c ce problème admet-il une solution ?

Solution : Appelons φ la rotation de centre A et d'angle $\alpha = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$. Comme $AB = AC$, on a $\varphi(C) = B$. Posons $K = \varphi(M)$.
Alors $BK = \varphi(C)\varphi(M) = CM = c$.
D'autre part $AK = AM = a$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}) = \alpha$ donc AKM est équilatéral et en particulier $AM = AK = KM = a$. Le tout est représenté sur la figure 10 page 10.

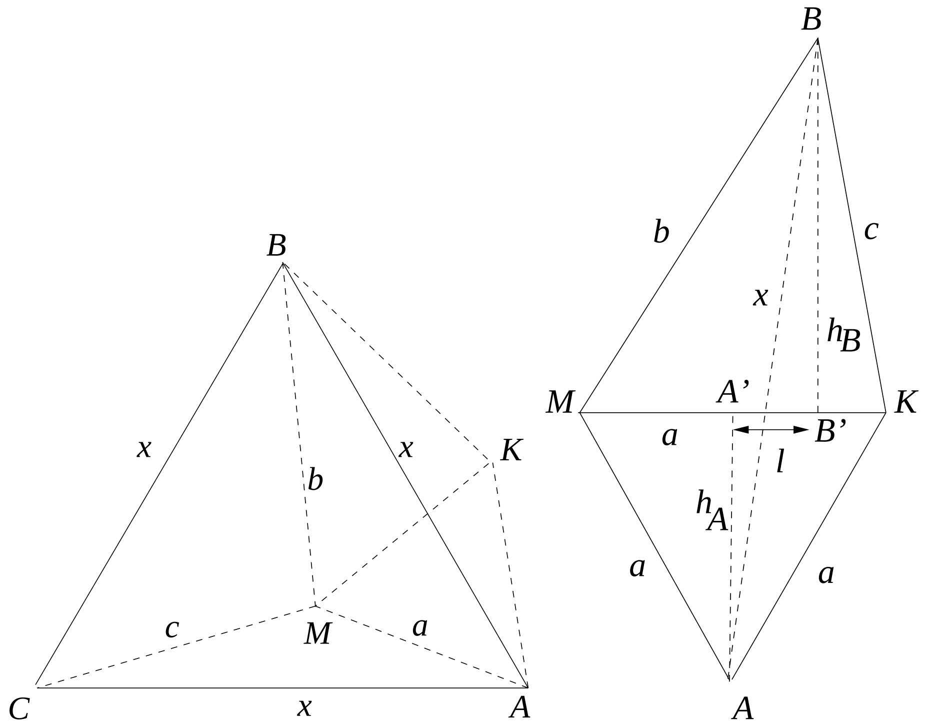

Figure 10: Triangle équilatéral : calcul de x

Nous allons donc calculer la longueur de la diagonale $x = AB$ du quadrilatère $MBKA$ (voir figure 10 page 10).

Pour cela, appelons A' et B' les pieds des hauteurs respectives de A et B sur (MK). Posons $h_A = AA'$, $h_B = BB'$ et $l = A'B'$ (l étant mesuré algébriquement dans le sens (MK)). Les deux cas de figure suivants peuvent se présenter :

$$x^2 = (h_A + h_B)^2 + l^2$$
$$x^2 = (h_A - h_B)^2 + l^2$$

Il nous faut donc calculer h_A, h_B et l. Le triangle MBB' est rectangle en B' donc $MB'^2 + BB'^2 = MB^2$. Or $MB' = MA' + A'B' = \frac{a}{2} + l$ donc :

$$h_B^2 + \left(\frac{a}{2} + l\right)^2 = c^2 \quad (1)$$

De même pour KBB' :

$$h_B^2 + \left(\frac{a}{2} - l\right)^2 = b^2 \quad (2)$$

En soustrayant (1) et (2) on trouve $2al = c^2 - b^2$, d'où :

$$l^2 = \frac{(c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

D'autre part, AMK est équilatéral donc $h_A = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Enfin, en notant $\mathcal{A}$ l'aire de MBK, on a $h_B = 2\frac{\mathcal{A}}{a}$. Alors en développant l'expression de x^2 (pour le premier cas) :

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + 2\frac{\mathcal{A}}{a}\right)^2 + l^2 = \frac{3}{4}a^2 + 2\sqrt{3}\mathcal{A} + 4\frac{\mathcal{A}^2}{a^2} + \frac{(c^2 - b^2)^2}{4a^2} = g(a, b, c) + 2\sqrt{3}\mathcal{A}$$

où $g(a, b, c) = \frac{3}{4}a^2 + 4\frac{\mathcal{A}^2}{a^2} + \frac{(c^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{1}{4a^2}\left(3a^4 + 16\mathcal{A}^2 + c^4 + b^4 - 2b^2c^2\right)$.
Pour le second cas on trouve $x^2 = g(a, b, c) - 2\sqrt{3}\mathcal{A}$.
On cherche à écrire $g(a, b, c)$ d'une manière symétrique en a, b, c.
D'après la formule de Héron :

$$\begin{aligned} 16\mathcal{A}^2 &= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(-a^2 + 2ab - b^2 + c^2)) \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}$$

Donc en fin de compte $g(a, b, c) = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, ou encore :

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\sqrt{3}\mathcal{A}$$

De même pour le second cas :

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 2\sqrt{3}\mathcal{A}$$

Qu'en est-il de la condition sur a, b et c ? Le triangle MBK doit pouvoir exister, donc a, b et c doivent vérifier l'inégalité triangulaire :

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq b + c \\ 0 \leq b \leq a + c \\ 0 \leq c \leq a + b \end{cases}$$

Réciproquement, construire MBK de côtés c, b, a puis A tel que MAK soit équilatéral de côté a est immédiat. Il suffit d'appliquer une rotation pour avoir C donc la condition est nécessaire et suffisante. ■

4.4 Construction de coniques

Exercice 4.11 (Newton, 1687 puis 1707) *Construire une parabole passant par quatre points donnés.*

Solution : Il s'agit de procéder en deux temps.

- On cherche quelle peut être la direction de l'axe de la parabole.

- On construit la parabole à partir de trois points plus la direction de l'axe.

■

Lemme 4.12 *Si deux cordes d'une parabole sont parallèles, alors la droite qui passe par leurs milieux est parallèle à l'axe de cette parabole.*

En effet, l'équation de la parabole est de la forme $y^2 = 2px$. Soient deux points de la parabole, de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1). Alors $y_1^2 - y_0^2 = 2p(x_1 - x_0)$. Or $y_1^2 + y_0^2 = (y_1 + y_0)(y_1 - y_0)$ donc la pente s de la corde vaut $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0}$. Alors, en notant η la distance de l'axe au milieu de la corde, on trouve $\eta = (y_1 + y_0)/2 = p/s$. En particulier les milieux de deux cordes de même pente ont la même ordonnée. CQFD.

Lemme 4.13 *Soit une corde sur une parabole. Alors la distance entre le point d'intersection de sa médiatrice avec l'axe et le projeté orthogonal du milieu de la corde sur l'axe est égale au demi-paramètre.*

En effet, avec les notations du lemme précédent, cette distance est ηs et d'après ce même lemme $\eta p = \frac{p}{s} s = p$. CQFD.

Corollaire 4.14 *Si les milieux de deux cordes d'une même parabole ont le même projeté orthogonal sur l'axe, alors les médiatrices des deux cordes se coupent sur l'axe.*

En effet, les points d'intersection des médiatrices avec l'axe sont tous deux à la distance (algébrique) p de projeté orthogonal commun aux deux milieurs. Ils sont donc confondus CQFD.

Lemme 4.15 (Pour trouver la direction de l'axe) *Soient $[AB]$ et $[A'B']$ deux cordes sur une parabole, avec un point d'intersection O et coupant l'axe en H et H' respectivement. Alors $\frac{OA.OB}{OA'.OB'} = \frac{OH^2}{OH'^2}$.*

Preuve : Pour l'instant, on s'intéresse seulement à la corde $[AB]$. Appelons M son milieu et U l'intersection de la parabole avec la parallèle [3] à l'axe passant par M.
Prenons U pour origine, orientons l'axe des x selon l'axe de la parabole, et l'axe des y selon la tangente en U (On a dessiné tout ça sur la figure 11 page 12).

On montre alors que dans ce repère l'équation de la parabole est $y^2 = 4kx$, où $k = FU$ et $4k =$

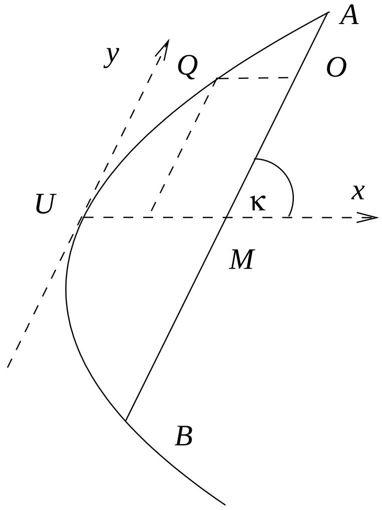

Figure 11: Direction de l'axe

$2p/\sin^2(\kappa)$, où $2p$ est le paramètre et κ est l'angle entre la corde $[AB]$ et l'axe.
Soit $O \in [AB]$, soit Q l'intersection de la parabole et de la parallèle à l'axe passant par 0. Alors $y_A^2 = 4kx_A$ et $y_Q^2 = 4kx_Q$ donc par soustraction :

$$y_A^2 - y_Q^2 = 4k(x_A - x_Q) \text{ i.e. } (y_A + y_Q)(y_A - y_Q) = 4k(x_A - x_Q)$$

[3] que nous ne connaissons pas pour l'instant !

Or $QO = x_A - x_Q \quad OA = y_A - y_Q \quad OB = y_A + y_Q$ donc :

$$OA.OB = 4k.QO \quad (1)$$

En raisonnant de même pour une autre corde $[A'B']$ passant par O :

$$OA'.OB' = 4k'.QO \quad (2)$$

où $4k' = 2p/\sin^2(\kappa')$ où κ' est l'angle entre $A'B'$ et l'axe.
Divisons (1) par (2) :

$$(OA.OB)/(OA'.OB') = k/k' = \sin^2(\kappa')/\sin^2(\kappa)$$

Soient H et H' les intersections de l'axe avec (AB) et $(A'B')$. Alors :

$$OH/OH' = \sin(\kappa')/\sin(\kappa)$$

donc d'après l'équation précédente :

$$(OA.OB)/(OA'.OB') = OH^2/OH'^2$$

CQFD ■

Lemme 4.16 (Construction avec trois points et la direction de l'axe)

5 Equations de plans et de droites

5.1 Distances

Théorème 5.1 (Distance d'un point un plan) *Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le plan P d'équation $ax + by + cy + d = 0$ (avec $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) , et le point $M(x_M, y_M, z_M)$. Alors :*

$$\mathrm{dist}(M, P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve : Le vecteur $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ est normal à P. Soit Δ la normale à P passant par O Elle admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a, b, c)$. Posons $I = \Delta \cap P$, et soit J le projeté orthogonal de M sur Δ. Posons $D = \mathrm{dist}(M, P)$. Alors $D = IJ$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}\|\overline{IJ} &= \|\overrightarrow{u}\|(\overline{OJ} - \overline{OI}) \\
&= \|\overrightarrow{u}\|\overline{OJ} - \|\overrightarrow{u}\|\overline{OI} \\
&= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} - \|\overrightarrow{u}\|\overline{OI} \quad \text{puisque } (JM) \perp \overrightarrow{u} \text{ donne } \|\overrightarrow{u}\|\overline{OJ} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} \\
&= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OI} \quad \text{car } \|\overrightarrow{u}\|\overline{OI} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OI} \text{ puisque } I \in (O, \overrightarrow{u})
\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OI} = ax_I + by_I + cz_I$. De plus $I \in P$, donc $ax_I + by_I + cz_I + d = 0$, d'où $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OI} = -d$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}\|\overline{IJ} &= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} + d \\
\overline{IJ} &= \tfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} + d}{\|\overrightarrow{u}\|}
\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} = ax_M + by_M + cz_M$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ donc en fin de compte :

$$\overline{IJ} = \frac{ax_M + by_M + cz_M + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Comme $D = IJ = |\overline{IJ}|$, la formule cherchée est immédiate. ■