Frobenius, les Complexes et les Quaternions

Gaëtan Bayle des Courchamps

29 Octobre 2012

Table des matières

1 Introduction

1.1 Objet de l'article

Cet article présente le corps des quaternions, en partant de la recherche initiale du mathématicen Hamilton (multiplier des n-uplets de réels) et en passant par le théorème de Frobenius, avant d'aborder leur utilisation en géométrie spatiale.

1.2 Motivation et définitions

Etant donnés les progrès gigantesques des mathématiques dus à une invention comme les nombre complexes, on pouvait légitimement se demander s'il était possible de construire, de façon semblable, des corps sous forme de triplets, quadruplets, etc. de nombres réels.
Le théorème de Frobenius vient grandement tempérer cet optimisme: si on veut un corps commutatif, on a seulement les complexes, et si on renonce à la commutativité on n'a que les quaternions.
Plus précisément:

Théorème 1.1 *Toute* $\mathbf{R}$*-algèbre associative unitaire intègre de dimension finie est isomorphe à l'ensemble* $\mathbf{C}$ *des complexes si elle est commutative, ou à l'ensemble* $\mathbf{H}$ *des quaternions si elle ne l'est pas.*

Quelques rappels de définitions pour savoir de quoi on parle:

Définition 1.2 (R-Algèbre associative unitaire intègre) $\mathbf{K}$ *est une* $\mathbf{R}$*-algèbre associative unitaire intègre ssi:*
- $\mathbf{K}$ *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel*
- $\mathbf{K}$ *est un anneau: il possède une loi multiplicative telle que* $x(y+z) = xy + xz$ *et* $(x+y)z = xz + yz$
- *La loi externe de* $\mathbf{R}\times\mathbf{K}$ *vers l'espace vectoriel* $\mathbf{K}$ *vérifie:* $\forall a \in \mathbf{R}, \forall (x,y) \in \mathbf{K}\times\mathbf{K}, \quad a(xy) = (ax)y = x(ay)$, *et* $1x = x$

- *Associativité: la multiplication dans* $\mathbf{K}$ *est associative:* $\forall (x,y,z) \in \mathbf{K}\times\mathbf{K}\times\mathbf{K}, \quad (xy)z = x(yz)$
- *Algèbre unitaire:* $\mathbf{K}$ *est un anneau unitaire. En d'autres termes la multiplication dans* $\mathbf{K}$ *possède un élément neutre* 1_K*. En identifiant* $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{R}1_K$*, on peut dire que* $\mathbf{K}$ *contient* $\mathbf{R}$*.*
- *Algèbre intègre:* $\forall (x,y) \in \mathbf{K}\times\mathbf{K}, \quad xy = 0 \Longrightarrow x = 0$ *ou* $y = 0$

2 Démonstration

Soit $\mathbf{K}$ une $\mathbf{R}$-algèbre intègre de dimension finie n, et soit $x \in \mathbf{K}$.
Comme $\mathbf{K}$ est de dimension finie n, la famille $(x^k)_{k=0\ldots n}$ est $\mathbf{R}$-liée.
Il existe donc un polynôme non-nul $P(X) \in P[X]$ tel que $P(x) = 0$.
Comme $\mathbf{K}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre, tout élément du corps de base $\mathbf{R}$ commute avec tout élément de $\mathbf{K}$: P est donc factorisable comme d'habitude en éléments de degré ≤ 2.
Comme $\mathbf{K}$ est intègre, il existe un polynôme Q de non-nul de degré ≤ 2 dont x est racine.
Si Q est de degré 1 ou si les racines de Q sont réelles: $x \in \mathbf{R}$.
Si Q est de degré 2 sans racine réelle, alors il existe deux réels b et c tels que $x^2 + bx + c$ avec $b^2 - 4c < 0$.
Posons $\Delta = b^2 - 4c$.
Alors $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{1}{4}\Delta < 0$. En posant $\mathbf{i} = 2\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{|\Delta|}}$ on a alors $\mathbf{i}^2 = -1$ et $x = -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}$
On a donc montré qu'il existe un élément $\mathbf{i}$ tel que $\mathbf{i}^2 = -1$ et $x \in \mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{i}$.
Mais combien existe-t-il de valeurs de $\mathbf{i}$ possibles?

2.1 Algèbre commutative

Soit une valeur $y \in \mathbf{K}$ telle que $y^2 = -1$. Alors $\mathbf{i}^2 - y^2 = 0$.
Or la commutativité de $\mathbf{K}$ permet la factorisation classique d'une différence de deux carrés: $(\mathbf{i}-y)(\mathbf{i}+y) = 0$.
L'intégrité nous donne alors $y = +\mathbf{i}$ ou $y = -\mathbf{i}$, ce qui ne change rien à l'espace vectoriel $\mathbf{K} = \mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{i}$.
En d'autres termes tous les espaces $\mathbf{K}$ possibles sont isomorphes à $\mathbf{C}$.

2.2 Algèbre non-commutative

Dans le cas où $\mathbf{K}$ n'est plus commutatif, la factorisation de $\mathbf{i}^2 - y^2$ n'est plus de mise: il faut faire autrement.
Il nous suffirait que $\mathbf{i}$ commute avec y. Définissons donc $U : \{x \in \mathbf{K}, \mathbf{i}x = x\mathbf{i}\}$ et $V : \{x \in \mathbf{K}, \mathbf{i}x = -x\mathbf{i}\}$.
Dans U la factorisation est valable, donc le raisonnement du cas commutatif s'applique i.e. U est isomorphe à $\mathbf{C}$ et, en particulier, U est commutatif.
Qu'en est-il du reste de $\mathbf{K}$? Eh bien tout élément x de $\mathbf{K}$ s'écrit de façon unique $x = u + v$ où $u \in U$ et $v \in V$.
En effet, si u et v existent alors $\mathbf{i}x\mathbf{i} = \mathbf{i}u\mathbf{i} + \mathbf{i}v\mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{i}u + \mathbf{i}(-\mathbf{i}v) = -u + v$. On se retrouve donc avec un banal système somme/différence qui donne $u = \frac{1}{2}(x - \mathbf{i}x\mathbf{i})$ et $v = \frac{1}{2}(x + \mathbf{i}x\mathbf{i})$.
V n'est pas réduit à $\{0\}$ sinon $\mathbf{K}$ vaudrait U et serait commutatif.
Il existe donc $x_0 \in V$, $x_0 \neq 0$. Le même raisonnement qu'avant la distinction commutatif/non-commutatif nous dit qu'il existe $(a, b, j) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{K}$, $x_0 = a + bj$, $j^2 = -1$.
De plus le fait que U et V soient supplémentaires avec $\mathbf{R} \subset U$ donne $a = 0$ d'où $x_0 = bj$ et finalement $j \in V$.
Prenons maintenant $x \in V$ quelconque et posons $y = jx$. Alors par définition de V: $\mathbf{i}y = \mathbf{i}jx = -j\mathbf{i}x = -j(-x\mathbf{i}) = jx\mathbf{i} = y\mathbf{i}$.
Donc $y \in U$, et il existe $(a, b) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}, y = a + b\mathbf{i}$. Alors $x = -j(jx) = -ja - jb\mathbf{i} = (-a)j + b(\mathbf{i})j$.
Alors en posant $k = \mathbf{i}j$, (j, k) est une base de V. Comme U est V sont supplémentaires, $(1, \mathbf{i}, j, k)$ est une base de $\mathbf{K}$.
On montre alors sans difficulté: $(-1) = \mathbf{i}^2 = j^2 = k^2$ avec $\mathbf{i}jk = (-1)$, $\mathbf{i}j = k = -j\mathbf{i}$, $jk = \mathbf{i} = -kj$, $k\mathbf{i} = j = -\mathbf{i}k$.
Ca c'est l'ensemble des quaternions que l'on appellera $\mathbf{H}$, et on a fini de montrer le théorème.

3 Analogies géométriques

3.1 Représentation réel+vecteur

On remarque à présent que multiplier deux quaternions prend 16 termes qu'il est pénible de calculer. D'où l'urgence de simplifier le problème, en remarquant la parfaite symétrie des nombres $\mathbf{i}$, j et k:

$$(a\mathbf{i} + bj + c)(\alpha\mathbf{i} + \beta j + \gamma k) = (b\gamma - c\beta)\mathbf{i} + (c\alpha - a\gamma)j + (a\beta - b\alpha)k - (a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

Si l'on assimile $a\mathbf{i} + bj + ck$ à un vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\alpha\mathbf{i} + \beta j + \gamma k$ à un autre vecteur $\overrightarrow{v}$, alors on reconnaît les expressions du produit vectoriel $\wedge$ et du produit scalaire $\cdot$, i.e:

$$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

En remettant à présent la partie réelle a, on peut alors assimiler un quaternion à une somme $a + \overrightarrow{u}$, où a est un réel, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur tridimensionnel à coordonnées réelles.
Par la suite, on conserve respectivement l'absence de symbole, le $\cdot$ et le $\wedge$ pour désigner respectivement un produit de quaternions, un produit scalaire de vecteurs et un produit vectoriel.
Les paragraphes précédents amènent alors à la formule de multiplication:

$$(a + \overrightarrow{u})(b + \overrightarrow{v}) = ab + a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

3.2 Module et conjugué

Le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}$ étant nul, on en déduit en particulier:

$$(a + \overrightarrow{u})(a - \overrightarrow{u}) = a^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2$$

A ce stade, on voit l'analogie avec la formule qui veut que le carré du module d'un nombre complexe soit le produit de ce nombre et de son conjugué: si $q = a + \overrightarrow{v}$ alors $conj(q) = a - \overrightarrow{v}$.
De plus:

$$|q|^2 = q\,conj(q)$$

3.3 Inversion

Et on en tire la même formule d'inversion que pour les complexes (prouvant au passage que $\mathbf{H}$ est bien un corps:

$$q^{-1} = \frac{conj(q)}{|q|^2} = \frac{a - \overrightarrow{v}}{a^2 + \|v\|^2}$$

3.4 Conservation du module d'un produit

Une des propriétés sympathiques du module d'un complexe était sa conservation par un produit. Pour regarder si la formule s'applique aux quaternions, on pourrait procéder à un développement brutal, mais les termes à calculer seraient fort nombreux.
Utilisons plutôt la représentation sous la forme réel+vecteur, en calculant le module du produit de deux quaternions $p = a + \overrightarrow{u}$ et $q = b + \overrightarrow{v}$.

$$|pq|^2 = c^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2$$

Avec $c = ab - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$
Le terme c est un simple réel, que l'on développe sans état d'âme:

$$c^2 = a^2b^2 - 2ab\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2$$

La valeur de $\|\overrightarrow{w}\|^2$ nous est donnée par le théorème de Pythagore, puisque $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, en tant que produit vectoriel, est orthogonal à $a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u}$:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{w}\|^2 &= \|a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 \\ &= a^2\|\overrightarrow{v}\|^2 + b^2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2ab\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$

Or $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2$ (développer la formule du produit vectoriel pour s'en convaincre). Après suppression des des termes opposés de $\|\overrightarrow{w}\|^2$ et de c^2, il reste:

$$\begin{aligned}|pq|^2 &= a^2b^2 + a^2\|\overrightarrow{v}\|^2 + b^2\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 \\ &= (a^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2)(b^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2) \\ &= |p|^2\,|q|^2\end{aligned}$$

Comme les modules sont des réels positifs ou nuls, on conclut:

$$|pq| = |p|\,|q|$$

Remarque : On a ainsi confirmation de l'intégrité de $\mathbf{H}$.

4 Conséquences et applications

Le découvreur des quaternions, Hamilton (d'où le symbole **H**) a passé la fin de sa vie à explorer leurs propriétés, tout comme un certain nombre de mathématiciens "quaternionistes" convaincus qu'ils tenaient là une nouvelle révolution mathématique.
S'ils n'ont pas abouti à la révolution espérée, les quaternions ont néanmoins fourni, grâce à la représentation réel+vecteur, un outil puissant de géométrie dans l'espace. A ce titre, on les retrouve à présent en infographie ou en théorie de la commande.