Dénombrement : le théorème de Polya

Gaëtan Bayle des Courchamps

6 avril 2003
(révision 7 Avril 2007)

Table des matières

1 Problème d'introduction

Nous cherchons à compter le nombre de façons de colorier m cases avec n couleurs. Au premier abord, c'est n^m. Mais si nous désirons ne compter qu'une fois les coloriages que l'on peut obtenir par rotation, par symétrie ou plus généralement par certaines permutations des cases, c'est beaucoup moins évident.

Exemple : Comment colorier en trois couleur un carré de 3×3 cases, sans compter deux fois les coloriages obtenus par une rotation ou une symétrie ?

La solution nous vient du théorème de Polya. Les notations nécessaires sont introduites dans la prochaine section, et les suivantes s'attaqueront à l'énoncé et à la démonstration du théorème, avant de l'appliquer à notre exemple.

2 Formulation mathématique du problème

Notons $A = \{1, \ldots, m\}$ l'ensemble des cases colorier, et $B = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des couleurs possibles. Un coloriage est alors une application $f : A \to B$. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des coloriages possibles.

Les rotations et symétries considérées engendrent un sous-groupe G de permutations de A. Nous noterons $\sim$ la relation d'équivalence entre deux coloriages, que l'on peut définir de la façon suivante :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \quad f \sim g \Longleftrightarrow \exists \sigma \in G, \quad g = f \circ \sigma$$

Notre problème revient alors à compter les classes d'équivalence induites sur $\mathcal{F}$ par cette relation. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces classes d''equivalence.

L'une des caractéristiques d'un coloriage f est le nombre de cases de chaque couleur. En abrégeant en X_B la notation $X_1, \ldots, X_n$, on peut résumer ceci en un monôme $w_f(X_B) = \prod_{b \in B} X_b^{\alpha_b(f)}$ où $\alpha_b(f) = |\{a \in A / f(a) = b\}|$ désigne le nombre de cases coloriées en b par f (dans tout ce qui suit et pour tout ensemble E, la notation $|E|$ désignera le cardinal de l'ensemble).
Le monôme w_f sera appelé *poids* de f.
Remarque : Tout d'abord, $w_f(X_B)$ vaut aussi $\prod_{a \in A} X_{f(a)}$ et il est de degré $|A| = m$.
Ensuite, deux coloriages équivalents ont le même poids, ce qui nous permet de définir le poids d'une classe

d'équivalence $c \in \mathcal{C}$ comme le poids de l'un de ses représentants; nous le noterons w_c.

Posons $W(X_B) = \sum_{c\in\mathcal{C}} w_c(X_B)$. Comme w_c vaut 1 en $(1,\ldots,1)$, le nombre total des classes d'équivalence est donné par $W(1,\ldots,1)$. Plus généralement, le coefficient d'un monôme $X_1^{\beta_1},\ldots,X_n^{\beta_n}$, avec $\beta_1+\ldots+\beta_n = m$ est le nombre des classes d'équivalence comportant, pour tout $b \in B$, β_b cases de couleur b.

Il suffit donc, pour résoudre notre problème, de calculer W. C'est là qu'intervient le théorème de Polya, dont la démonstration fait l'objet des sections qui suivent.

3 Le lemme de Burnside

Le lemme de Burnside est l'argument principal de la démonstration du théorème de Polya. Le voici donc, avec une démonstration :

Lemme 3.1 (Lemme de Burnside) *Soient E et F deux ensembles finis. Notons $S(E)$ et $S(F)$ leurs groupes des permutations respectifs. Soit φ un morphisme de groupes de $S(E)$ dans $S(F)$. Soit G un sous-groupe de $S(E)$. Notons H le groupe image de G par φ.*
Appelons $\sim$ la relation d'équivalence définie par :

$$\forall (x,y) \in F\times F, \quad x \sim y \Longleftrightarrow \exists \sigma \in G, \quad y = \varphi(\sigma)(x)$$

et notons F_H l'ensemble des classes d'équivalence. Alors :

$$|F_H|\,|G| = \sum_{\sigma\in G} |\{x \in F/\varphi(\sigma)(x) = x\}|$$

Preuve : Posons : $\forall (x,y) \in F\times F, \quad G_{x,y} = \{\sigma \in G/\varphi(\sigma)(x) = y\}$.
Posons : $\forall x \in F, \quad F_x = \{\varphi(\sigma)(x)/\sigma \in G\}$, et prenons un x fixé.
Soit $y \in F_x$. Alors il existe $\sigma \in G$ tel que $\varphi(\sigma)(x) = y$. Soit η une autre permutation vérifiant $\varphi(\eta)(x) = y$.
Alors :

$$\begin{array}{lcll}
\varphi(\eta)(x) & = & \varphi(\sigma)(x) & \\
\varphi(\eta^{-1})(\varphi(\eta)(x)) & = & \varphi(\eta^{-1})(\varphi(\sigma)(x)) & \\
x & = & \varphi(\eta^{-1}\circ\sigma)(x) & \text{(morphisme de groupes)} \\
x & = & \varphi(\tau)(x) & \text{avec } \tau = \eta^{-1}\circ\sigma
\end{array}$$

Donc $\eta = \sigma\circ\tau$ avec $\tau \in G_{x,x}$, donc $G_{x,y} \subset \{\sigma\circ\tau/\tau \in G_{x,x}\}$.
Réciproquement, pour tout $\tau \in G_{x,x}$, $\varphi(\sigma\circ\tau)(x) = \varphi(\sigma)(x) = y$, donc $G_{x,y} \supset \{\sigma\circ\tau/\tau \in G_{x,x}\}$, d'où l'égalité par double inclusion.
En particulier, $|G_{x,x}| = |G_{x,y}| \quad (*)$ pour tout $y \in F_x$.D'autre part, les $(G_{x,y})_{y\in F}$ sont disjoints, et $\forall (x,\sigma) \in F\times G, \quad x \in G_{x,\sigma(x)}$, avec $\sigma(x) \in F_x$. On en tire $|G| = \sum_{y\in F_x} |G_{x,y}|$.
Donc d'après $(*)$ on obtient

$$|G| = |F_x|\,|G_{x,x}| \quad (**)$$

Nous pouvons alors terminer la démonstration du lemme : posons $K = \{(x,\sigma) \in F\times G/\varphi(\sigma)(x) = x\}$.
Alors $K = \bigcup_{x\in F}\{(x,\sigma)/\sigma \in G, \varphi(\sigma)(x) = x\} = \bigcup_{\sigma\in G}\{(x,\sigma)/x \in F, \varphi(\sigma)(x) = x\}$ donc d'une part :

$$|K| = \sum_{\sigma\in G} |\{(x,\sigma)/x \in F, \varphi(\sigma)(x) = x\}| = |\{x \in F/\varphi(\sigma)(x) = x\}| \quad (***)$$

et d'autre part

$$|K| = \sum_{\sigma\in F} |\{(x,\sigma)/\sigma \in G, \varphi(\sigma)(x) = x\}| = \sum_{\sigma\in F} |G_{x,x}|$$

Nous pouvons décomposer cette somme suivant les classes F_H :

$$\begin{array}{lcll}
|K| & = & \sum_{c\in F_H}\sum_{x\in c} |G_{x,x}| & \\
 & = & \sum_{c\in F_H}\sum_{x\in c} \frac{|G|}{|c|} & \text{d'après } (**) \\
 & = & \sum_{c\in F_H} |G| & \\
 & = & |F_H|\,|G| &
\end{array}$$

En rapprochant ceci de $(***)$ on obtient ce que l'on voulait. ∎

4 Le théorème de Polya

Soit w un poids, i.e. un monôme unitaire à n indéterminées et de degré m, comme nous l'avons défini dans la section 2 page 1. Notons $\mathcal{F}^w$ l'ensemble des coloriages de poids w.

Nous allons appliquer le lemme de Burnside (3.1 page 2), en gardant les mêmes notations et en considérant le morphisme de groupes suivant :

$$\begin{array}{llll} \varphi & G \longrightarrow & S(\mathcal{F}^w) & \\ & \sigma \longrightarrow & \varphi(\sigma) : & f \to f \circ \sigma^{-1} \end{array}$$

Posons $H = \varphi(G)$ et notons $\mathcal{F}_H^w$ l'ensemble des classes d'équivalence de poids w. Appliquons le lemme :

$$\begin{array}{ll} |\mathcal{F}_H^w|\,|G| & = \sum_{\sigma\in G} |\{f \in \mathcal{F}^w / \varphi(\sigma)(f) = f\}| \\ & = \sum_{\sigma\in G} \left|\{f \in \mathcal{F}^w / f \circ \sigma^{-1} = f\}\right| \\ & = \sum_{\sigma\in G} |\{f \in \mathcal{F}^w / f \circ \sigma = f\}| \qquad \text{(Réindexation } \sigma \leftarrow \sigma^{-1}) \end{array}$$

Or, en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des poids possibles, la définition de W donne $W(X_B) = \sum_{w\in\mathcal{P}} |\mathcal{F}_H^w|\, w(X_B)$, donc :

$$\begin{array}{lll} W(X_B) & = & \sum_{w\in\mathcal{P}} \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\in G} |\{f \in \mathcal{F}^w / f \circ \sigma = f\}|\, w(X_B) \\ & = & \frac{1}{|G|} \sum_{w\in\mathcal{P}} \sum_{\sigma\in G} |\{f \in \mathcal{F}^w / f \circ \sigma = f\}|\, w(X_B) \\ & = & \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \sum_{f\in\Lambda_\sigma} w_f(X_B) \qquad \text{où } \Lambda_\sigma = \{f \in \mathcal{F} / f \circ \sigma = f\} \quad (*) \end{array}$$

Or par définition de w_f :

$$\forall \sigma \in G, \sum_{f\in\Lambda_\sigma} w_f(X_B) = \sum_{f\in\Lambda_\sigma} \prod_{a\in A} X_{f(a)}$$

Pour tout $f \in \Lambda_\sigma$, on a $f \circ \sigma = f$, donc f est constante sur tout cycle[1] de σ. Donc, en notant $q(\sigma)$ le nombre des cycles, f est caractérisée par les couleurs $(b_1, \ldots, b_{q(\sigma)})$ qu'elle prend sur chaque cycle de σ. Alors en appelant $\mathrm{Cl}(\sigma)$ l'ensemble des cycles de σ, en les nommant $C_1, \ldots, C_{q(\sigma)}$ et en notant $l(C_i)$ la longueur du cycle d'index i :

$$\sum_{f\in\Lambda_\sigma} w_f(X_B) = \sum_{(b_1,\ldots,b_{q(\sigma)})\in B^{q(\sigma)}} \prod_{i=1}^{q(\sigma)} X_{b_i}^{l(C_i)} = \prod_{C\in\mathrm{Cl}(\sigma)} \sum_{b\in B} X_b^{l(C)}$$

donc $(*)$ devient $W(X_B) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \prod_{C\in\mathrm{Cl}(\sigma)} \sum_{b\in B} X_b^{l(C)}$.
Ou encore, en posant $i = l(C)$, en groupant les cycles de longueur i (comprise entre 1 et m) et en notant $c_i(\sigma)$ le nombre des cycles de longueur i de σ :

$$W(X_B) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{b\in B} X_b^i \right)^{c_i(\sigma)}$$

Nous pouvons donc (enfin!) formuler le théorème de Polya :

Théorème 4.1 (Théorème de Polya)

$$W(X_B) = P_G\left(\sum_{b\in B} X_b^1, \sum_{b\in B} X_b^2, \sum_{b\in B} X_b^3, \ldots, \sum_{b\in B} X_b^m \right)$$

où l'on définit le polynôme indicateur des cycles *de G ainsi :*

$$P_G(X_1, \ldots, X_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \prod_{i=1}^{m} X_i^{c_i(\sigma)}$$

Remarque : En particulier, Le nombre de coloriages distincts en n couleurs est alors $W(1, \ldots, 1) = P_G(n, \ldots, n)$.
Nous pouvons maintenant passer à la section suivante pour appliquer ce théorème et résoudre ainsi notre problème d'introduction.

[1]En effet, toute permutation est décomposable en un produit de cycles de supports disjoints, et la décomposition est unique à l'ordre des cycles près.

5 Application au problème

Dans le cas du carré 3×3, le groupe G est engendré par une rotation r d'un quart de tour, et par une symétrie s (par rapport à une diagonale par exemple). Il compte 8 éléments : $I = r^4$, r, r^2, r^3, s, $s_2 = r \circ s$, $s_3 = r^2 \circ s$, $s_4 = r^3 \circ s$.

Les cycles de ces permutations étant de longueur 1, 2 ou 4, nous n'avons qu'à nous occuper des exposants c_1, c_2 et c_4 pour le calcul de P_G.
I comporte 9 points fixes; les rotations r et r^3 laissent chacune une case fixe et engendrent 2 cycles de 4 cases; la symétrie centrale r^2 laisse une case fixe et engendre 4 cycles de 2 cases; les symétries s, s_2, s_3 et s_4 ont chacune 3 cases fixes et 3 cycles de 2 cases.
Tout ceci se résume dans le tableau qui suit :

σ	c_1	c_2	c_4
I	9	0	0
r	1	0	2
r^2	1	4	0
r^3	1	0	2
s	3	3	0
s_2	3	3	0
s_3	3	3	0
s_4	3	3	0

Comme le nombre de cases m vaut 9, et comme $|G| = 8$, $P_G(X_1, \ldots, X_9) = \frac{1}{8}\left(X_1^9 + X_1 X_2^4 + 2X_1 X_4^2 + 4X_1^3 X_2^3\right)$.
Le nombre des coloriages cherchés est donc :

$$\begin{aligned} W(1,1,1) &= P_G(3, \ldots, 3) \\ &= \tfrac{1}{8}\left(3^9 + 3 \times 3^4 + 2 \times 3 \times 3^2 + 4 \times 3^3 \times 3^3\right) \\ &= 2862 \end{aligned}$$

Si nous voulons compter le nombre des coloriages comportant 6 cases de la couleur 1, 2 de la couleur 2 et 1 de la couleur 3, il nous faut déterminer le coefficient de $X_1^6 X_2^2 X_3$ dans $W(X_1, X_2, X_3)$ Le résultat du développement est :

$$\begin{aligned} W(X_1, X_2, X_3) = \;& X_1^9 + \ldots + 3(X_1^8 X_3 + \ldots) + 8(X_1^7 X_2^2 + \ldots) + 12(X_1^7 X_2 X_3 + \ldots) + 16(X_1^6 X_2^3 + \ldots) \\ & + 38(X_1^6 X_2^2 X_3 + \ldots) + 23(X_1^5 X_2^4 + \ldots) + 72(X_1^5 X_2^3 X_3 + \ldots) + 108(X_1^5 X_2^2 X_3^2 + \ldots) \\ & + 89(X_1^4 X_2^4 X_3 + \ldots) + 174(X_1^4 X_2^3 X_3^2 + \ldots) + 228(X_1^3 X_2^3 X_3^3) \end{aligned}$$

où les points de suspension représentent les termes obtenus par permutation des variables. En pratique, nous aurons intérêt à ne développer que les termes qui nous intéressent !
Le nombre cherché est alors 38.

Si l'on veut compter le nombre des coloriages comportant $n = 3$ couleurs distinctes, il faut retirer de $W(1, \ldots, 1)$ ceux qui comptent moins de couleurs, i.e. les coefficients des termes de la forme X_i^9 ou $X_i^a X_j^b$, avec $a + b = m = 9$.
Il y a 3 termes de la forme X_i^9, et 6 termes pour chacune des formes $X_i^8 X_j$, $X_i^7 X_j^2$, $X_i^6 X_j^3$ et $X_i^5 X_j^4$. Le nombre recherché (appelons-le N) est donc :

$$\begin{aligned} N &= W(1,1,1) - (1 \times 3) - (3 \times 6) - (8 \times 6) - (16 \times 6) - (23 \times 6) \\ &= 2862 - 303 \\ &= 2559 \end{aligned}$$

A première vue, il pourrait sembler plus simple de retirer $3!P_G(2, \ldots, 2)$. Mais on obtient alors $2862 - 6 \times 102 = 2250$. D'où vient l'erreur? Simplement de ce que, pour certains coloriages, certaines permutations de couleurs reviennent à une permutation des cases par un élément de G: on retire alors plusieurs fois le "même" coloriage, d'où l'erreur.
La méthode du développement peut donc sembler fastidieuse, mais c'est la seule vraiment fiable !